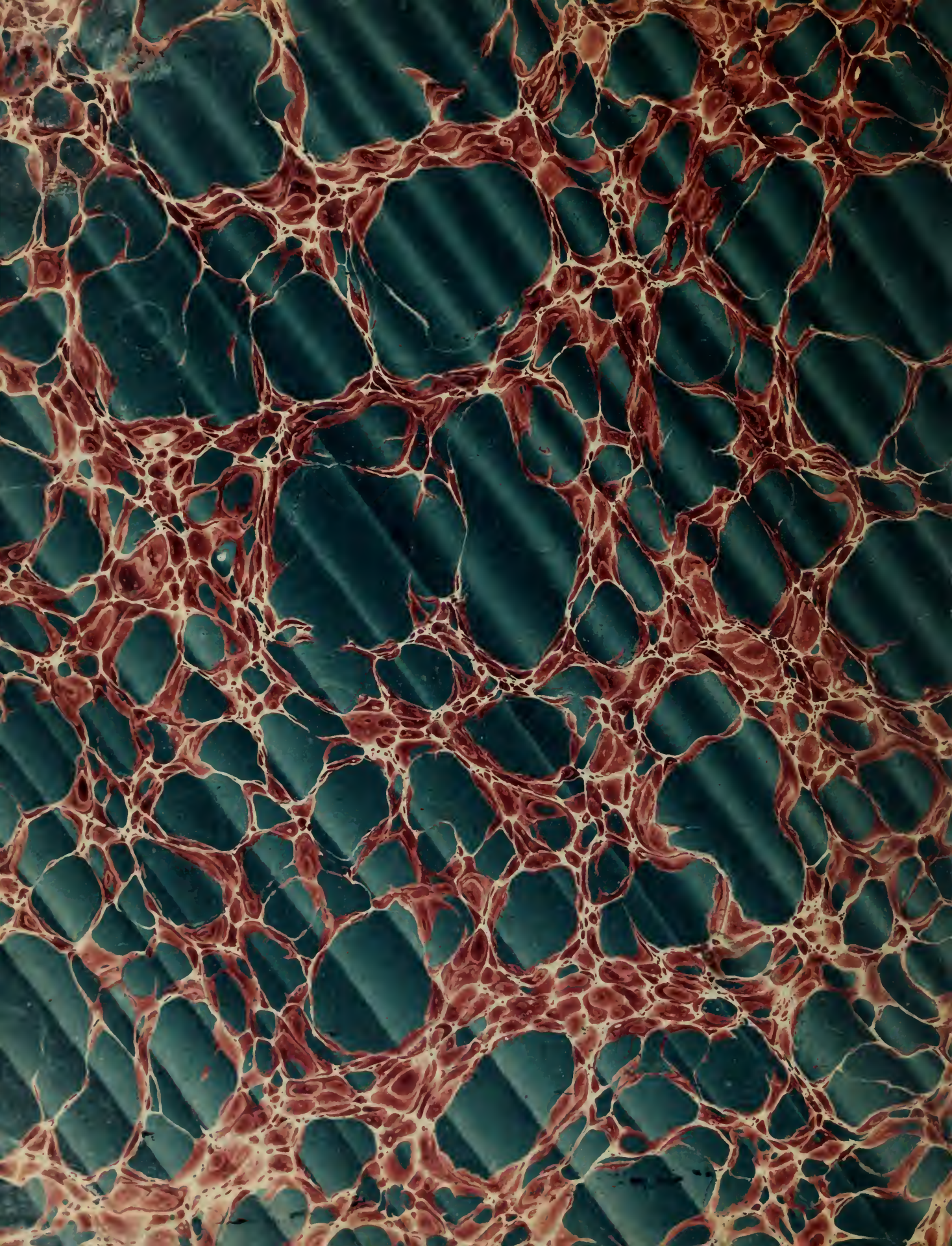
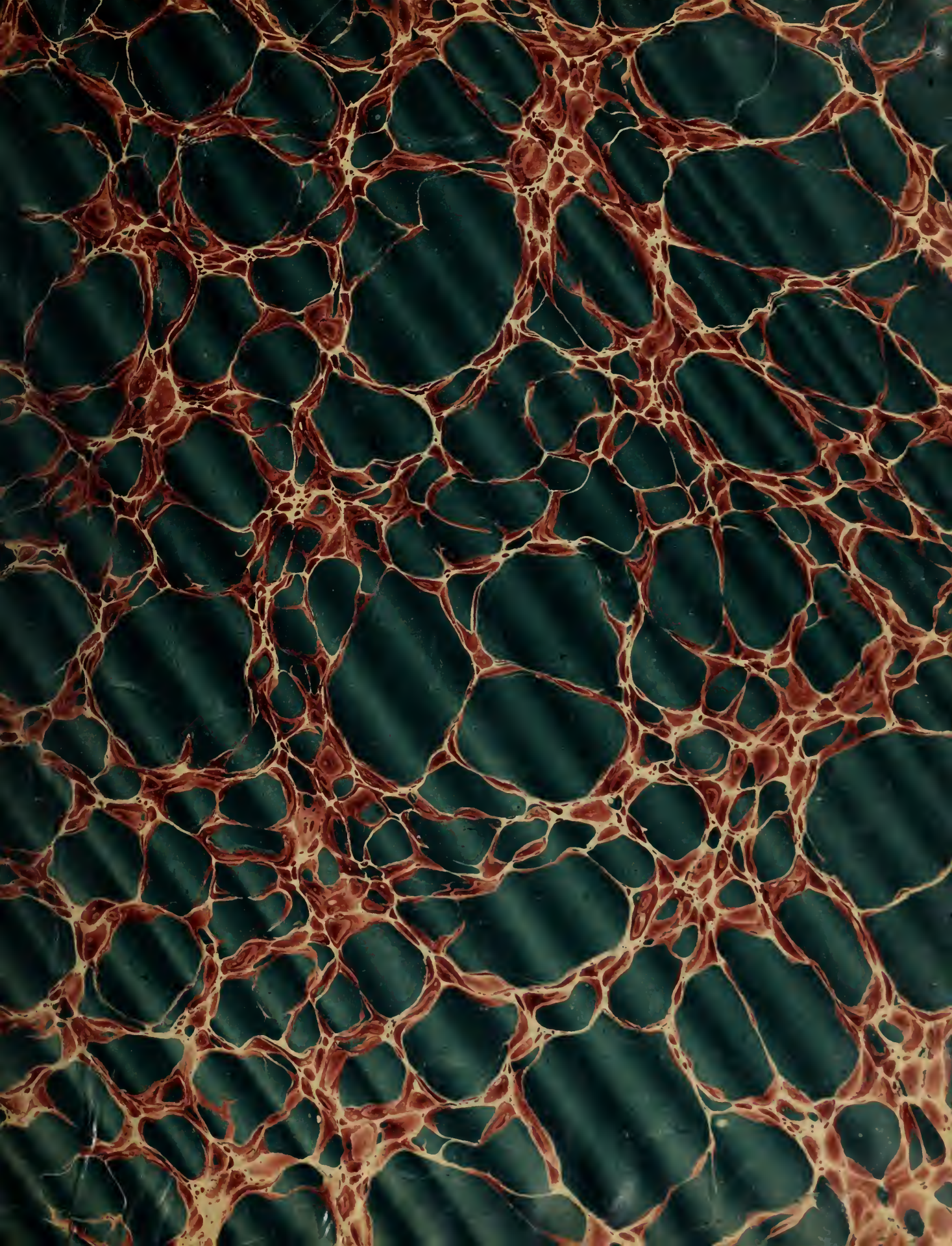




Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/revuedemathmat03pari

Annee 3

Physical & Applied Sci. Serials

REVUE
DE
MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

QA 1 R486 Année 3

291723/33 9 30

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Concours de 1892).

Composition de Mathématiques.

162. — *On donne une hyperbole équilatère et une circonférence* (C) *décrite sur une corde* DD′ *de cette hyperbole comme diamètre.*

1° On mène dans la circonférence une corde perpendiculaire à DD′ *: démontrer que la moitié de cette corde est moyenne proportionnelle entre les distances de son milieu aux points où elle rencontre l'hyperbole ;*

2° Indiquer dans quel cas les points d'intersection de la circonférence et de l'hyperbole sont tous réels ;

3° Trouver le lieu des points de rencontre des sécantes communes à l'hyperbole et à la circonférence, lorsque la corde DD′ *se déplace en restant parallèle à une direction fixe ;*

4° Soit H *un des points communs à l'hyperbole et au cercle mobile,* A *le point où la tangente à la circonférence en* H *coupe l'hyperbole,* B *le point où la tangente à l'hyperbole en* H *coupe la circonférence : prouver que la droite* AB *passe par un point fixe.*

SOLUTION ANALYTIQUE

1° Prenons pour axes des x la droite DD′, et la perpendiculaire en son milieu pour axe des y. Les équations du cercle C et de l'hyperbole équilatère sont

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

$$f(x, y) \equiv 2y(ax + by + c) - b(x^2 + y^2 - R^2) = 0.$$

Coupons ces deux courbes par une sécante définie par l'équation

$$x = \alpha.$$

Si ω est le milieu de la corde déterminée par cette sécante dans le cercle, R étant l'un de ses points d'intersection avec le cercle, P et Q étant les points de rencontre avec l'hyperbole, on obtient immédiatement

$$\overline{\omega R}^2 = R^2 - \alpha^2,$$

$$\omega P . \omega Q = \frac{b(R^2 - \alpha^2)}{b} = R^2 - \alpha^2,$$

ce qui démontre la première partie.

2° Le diamètre de l'hyperbole équilatère, conjugué à l'axe des y, a pour équation

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

c'est-à-dire

$$ax + by + c = 0.$$

Ce diamètre est donc l'une des cordes communes au cercle et à l'hyperbole, et cette corde commune est précisément la corde HH′ associée à DD′. Ainsi HH′ est un diamètre, et si l'on mène par le centre

de l'hyperbole une parallèle à DD′, ce diamètre et le diamètre HH′ seront également inclinés sur les axes de symétrie de l'hyperbole. Donc, pour que les quatre points communs au cercle et à l'hyperbole soient réels, il faut et il suffit que le diamètre de cette hyperbole qui est parallèle à DD′ soit un diamètre transverse.

Les points communs aux deux courbes sont définis par le système

$$y(ax + by + c) = 0,$$
$$x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

Pour que les racines de ce système soient réelles, il faut que les conditions suivantes soient vérifiées: 1° que R soit réel; 2° que l'on ait en outre

$$\frac{c^2}{a^2 + b^2} < R^2. \qquad (1)$$

Or le centre est à l'intersection des diamètres représentés par les équations

$$ax + by + c = 0,$$
$$bx - ay = 0;$$

on a, en appelant x_0, y_0 les coordonnées du centre,

$$x_0 = \frac{-ac}{a^2 + b^2}, \qquad y_0 = \frac{-bc}{a^2 + b^2}.$$

et par suite $$f(x_0, y_0) = -b(x_0^2 + y_0^2 - R^2) = -b\left(\frac{c^2}{a^2 + b^2} - R^2\right).$$

D'ailleurs $$f(0, 0) = bR^2.$$

La condition (1) exprime donc que le milieu de DD′ doit être extérieur à l'hyperbole, c'est-à-dire que D doit être sur une branche et D′ sur l'autre; c'est la condition trouvée plus haut.

3° Si la corde DD′ a une direction fixe, le diamètre HH′ de l'hyperbole est fixe; prenons-le pour axe des x, l'axe des y étant la perpendiculaire au milieu de HH′; l'hyperbole sera représentée par l'équation

$$x^2 + 2Bxy - y^2 + F = 0;$$

le cercle considéré passe par H et H′; son équation est donc de la forme

$$x^2 + y^2 + 2Ey + F = 0,$$

E étant le seul paramètre variable. Exprimons que le point de coordonnées (x, y) est un pôle double, ce qui donne

$$\frac{x + By}{x} = \frac{Bx - y}{y + E} = \frac{F}{Ey + F}.$$

L'élimination de E ne présente aucune difficulté; on tire en effet des égalités précédentes

$$\frac{x + By}{x} = \frac{y^2 - Bxy + F}{F - y^2},$$

c'est-à-dire $$y[B(x^2 - y^2) - 2xy + BF] = 0.$$

Le lieu se compose donc de l'axe des x, ce qui était à prévoir, et d'une hyperbole équilatere passant par les points H et H′; de plus les asymptotes de l'une de ces hyperboles sont les axes de symétrie de l'autre.

4° Prenons encore pour axe des x la droite HH′, l'axe des y étant la tangente en H à l'hyperbole qui aura pour équation

$$x^2 - y^2 - 2ax = 0.$$

en posant $HH' = 2a$. L'équation de l'un des cercles considérés sera

$$x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 - 2(ax - \lambda y) = 0.$$

Soit

$$ux + vy = 1$$

l'équation de la droite AB. Le faisceau des droites joignant l'origine aux points de rencontre de cette droite avec le cercle a pour équation

$$x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 - 2(ax - \lambda y)(ux + vy) = 0.$$

Le premier membre doit contenir x en facteur; donc

$$1 + 2\lambda v = 0.$$

Le faisceau semblable relatif à l'hyperbole a pour équation

$$x^2 - y^2 - 2ax(ux + vy) = 0;$$

le premier membre doit être divisible par $ax - \lambda y$, ce qui donne une nouvelle condition :

$$\lambda^2(1 - 2au) - a^2(1 + 2\lambda v) = 0$$

ou, en tenant compte de la première condition,

$$2au - 1 = 0,$$

ce qui prouve que la droite AB passe par le point H'.

E. Bourrienne; J. Hais (lycée Hoche); C. Rau (lycée Condorcet); Th. Louzon.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

La solution géométrique de cette question se déduit immédiatement de la remarque suivante.

La corde DD' interceptée sur une hyperbole équilatère par les côtés d'un angle droit qui pivote autour de son sommet H, pris sur cette courbe, passe, d'après le théorème de Frégier, par un point fixe de la normale en H. D'ailleurs comme la droite de l'infini est une des positions de la corde DD', ce point fixe est à l'infini, et la corde DD' reste parallèle à la normale en H. Autrement dit, tous les cercles (C), ayant pour diamètres les cordes parallèles DD' d'une hyperbole équilatère, passent par les deux points fixes H et H' de cette courbe, où les normales sont parallèles à DD'.

1° Tous les cercles (C) déterminent donc une involution sur une droite quelconque : si celle-ci est perpendiculaire à DD', les points doubles de cette involution sont ceux où elle coupe l'hyperbole, car les cercles admettant pour diamètres les cordes considérées passant par ces points, sont évidemment tangents à la droite considérée. Celle-ci coupe donc un des cercles (C) et l'hyperbole en quatre points formant une division harmonique, ce qui démontre la première partie de l'énoncé.

2° Les points H et H' seront réels ou imaginaires selon que l'on pourra ou non mener à l'hyperbole des normales parallèles à DD', ou encore, suivant que les points D et D' seront sur deux branches différentes, ou sur la même branche de l'hyperbole.

3° La sécante commune fixe HH' constitue une partie du lieu demandé.

Le reste est constitué par l'intersection des droites HD et H'D' quand le point D décrit l'hyperbole. Ces droites engendrant visiblement des faisceaux homographiques, le lieu est une conique passant par H et H' : elle est évidemment concentrique à l'hyperbole équilatère, et admet, comme on le voit aisément, pour asymptotes, les axes de celle-ci.

4° Soient AA′ la corde de l'hyperbole parallèle à DD′ passant par A, et K le second point d'intersection de la droite AB et de la circonférence de diamètre AA′. Les angles HKB et AHB, interceptant sur cette circonférence des arcs symétriques par rapport à AA′, sont égaux; il en résulte que le cercle BHK est tangent à AH et se confond avec le cercle (C) considéré : le point K est donc à la fois sur ce cercle et sur celui de diamètre AA′ : il coïncide donc avec le point H′, qui est par suite un point fixe de la droite AB.

Ernest Duporcq (école Monge).

Solutions géométriques analogues par MM. Bourrienne, J. Hais, C. Rau.

Triangle.

Données	*Résultats*	*Vérification*
$a = 58124,59$	$A = 86° \ 39' \ 9'', 79$	
$b = 46571,46$	$B = 53° \ 7' \ 3'', 04$	
$c = 37604,18$	$C = 40° \ 13' \ 47'', 18$	$A + B + C = 180° \ 0' \ 0'', 01$
	$S = 874146800$	

Formules

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}; \qquad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}, \qquad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}; \qquad S = pr.$$

Log r.

	4,1147952
	4,3905581
	4,5256399
	$\bar{5}$,1478244
Log r^2 =	8,1788176
Log r =	4,0894088

CALCULS AUXILIAIRES

	58 124,59
	46 571,46
	37 604,18
$2p$ =	142 300,23
p =	71 150,115
$p - a$ =	13 025,525
$p - b$ =	24 578,655
$p - c$ =	33 545,935

Calcul de log (p − a).

13025		1147777	$\Delta = 334$
	5	167	
	2	6,68	
	5	1,67	
		1147952,35	

log $(p - a)$ = 4,1147952

Calcul de log (p − b).

24578		3905465	$\Delta = 177$
	6	106,2	
	5	8,85	
	5	0,885	
		3905580,935	

log $(p - b)$ = 4,3905581.

Log tg $\frac{A}{2}$.

$$\begin{array}{r} 4,0894088 \\ 4,1147952 \\ \hline \log tg \frac{A}{2} = \bar{1},9746136 \end{array}$$

$\frac{A}{2} = 43^\circ\ 19'\ 34^\circ,\ 893$

$A = 86^\circ\ 39'\ 9'',\ 786$

Log tg $\frac{B}{2}$.

$$\begin{array}{r} 4,0894088 \\ 4,3905581 \\ \hline \log tg \frac{B}{2} = \bar{1},6988507 \end{array}$$

$\frac{B}{2} = 26^\circ\ 33'\ 31'',\ 52$

$B = 53^\circ\ 7'\ 3'',\ 04$

CALCULS AUXILIAIRES

Calcul de log (p − c).

33545	5256278		Δ = 129
9	116,1		
3	3,87		
5	0,645		
	5256398,715		

$\log (p - c) = 4,5256399.$

Calcul de log p.

71150	8521749		Δ = 61
1	6,1		
1	0,61		
5	0,305		
	8521756,015		

$\log p = 4,8521756.$

$\text{colog}\, p = \bar{5},1478244.$

Calcul de $\frac{A}{2}$.

$\bar{1}$,9746136		
5930	43° 19′ 30″	Δ = 421
206		
168,4	4	
37,6		
33,68	8	
3,92		
3,782	9	
0,138	3	
$\frac{A}{2}$ =	43° 19′ 34″,893	

Calcul de $\frac{B}{2}$.

$\bar{1}$,6988507		
427	26° 33′ 30″	Δ = 526
80		
52,6	1	
27,4		
26,3	5	
1,1		
1,052	2	
$\frac{B}{2}$ =	26° 33′ 31″,52	

Log tg $\frac{C}{2}$.

$$\begin{array}{rr} & 4,0894088 \\ & 4,5256399 \\ \hline \log tg \frac{C}{2} = & 1,5637689 \end{array}$$

$$\frac{C}{2} = 20^\circ\ 6'\ 53'',\ 59$$

$$C = 40^\circ\ 13'\ 47'',\ 18$$

Log S.

$$\begin{array}{rr} & 4,1147952 \\ & 4,3905581 \\ & 4,5256399 \\ & 4,8521756 \\ \hline 2 \log S = & 17,8831688 \\ \log S = & 8,9415844 \\ S = & 874146800 \end{array}$$

CALCULS AUXILIAIRES

Calcul de $\frac{C}{2}$.

$$\begin{array}{lll} 1,5637689 & & \\ \quad 455 & 20^\circ\ 6'\ 50'' & \Delta = 652 \\ \hline \quad 234 & & \\ \quad 195,6 & 3 & \\ \hline \quad 38,4 & & \\ \quad 32,6 & 5 & \\ \hline \quad 5,8 & & \\ \quad 5,216 & 8 & \\ \hline \quad 0,584 & 9 & \\ \hline \quad \frac{C}{2} = & 20^\circ\ 6'\ 53'',\ 59 & \end{array}$$

Calcul de S.

$$\begin{array}{lll} 9415844 & & \\ \quad 10 & 87414 & \Delta = 50 \\ \hline \quad 34 & & \\ \quad 30 & 6 & \\ \hline \quad 4 & 8 & \\ \hline \quad S = & 874146800 & \end{array}$$

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1892

Classe de Mathématiques spéciales.

158. — *Soient* Q *une quadrique circonscrite à un ellipsoïde donné* E, *et* A *le pôle, par rapport à l'ellipsoïde, du plan* P *de la courbe de contact des deux surfaces.*

1° Démontrer qu'il y a, en général, trois quadriques Q_1, Q_2, Q_3 *homofocales avec l'ellipsoïde* E *et telles que les plans polaires* P_1, P_2, P_3 *du point* A *par rapport aux quadriques* Q_1, Q_2, Q_3 *passent par le centre de la quadrique* Q.

2° Les plans P_1, P_2, P_3 *sont les plans principaux de la quadrique* Q, *et les coniques* C_1, C_2, C_3, *intersections des surfaces* (P_1, Q_1), (P_2, Q_2), (P_3, Q_3), *sont les focales de cette quadrique.*

3° Les projections orthogonales des coniques C_1, C_2, C_3 *sur les plans principaux de l'ellipsoïde* E *sont des coniques homofocales.*

On projettera, en particulier, les coniques sur le plan principal qui contient l'axe majeur et l'axe moyen de l'ellipsoïde, et l'on cherchera le lieu décrit par les foyers des coniques projetées, quand la quadrique Q *varie en restant circonscrite à l'ellipsoïde, le plan* P *de la courbe de contact ne changeant pas.*

1° Soient ω le centre de la quadrique Q et O celui de l'ellipsoïde E. Le point A est le pôle du plan P par rapport à l'ellipsoïde E et aussi par rapport à la quadrique Q qui lui est circonscrite; il en

résulte que le point ω est sur le diamètre OA de l'ellipsoïde. Les quadriques homofocales à l'ellipsoïde E ont toutes pour centre le point O. Pour qu'une quadrique satisfasse aux conditions de l'énoncé, il faut et il suffit qu'elle passe par un point I pris sur OA et tel que $\overline{OI}^2 = OA.O\omega$. Or on sait que l'on peut, en général, faire passer par un point donné trois quadriques homofocales à une quadrique donnée. L'existence des trois quadriques Q_1, Q_2, Q_3 est ainsi établie.

2° Soient

$$f(u, v, w, h) = 0,$$

l'équation de l'ellipsoïde E, et

$$A \equiv \alpha u + \beta v + \gamma w + h = 0,$$

l'équation du point $A(\alpha, \beta, \gamma)$. La quadrique Q circonscrite à l'ellipsoïde E le long de son intersection par le plan polaire de A, a pour équation

$$f(u, v, w, h) + \lambda A^2 = 0.$$

λ ayant une valeur donnée. Ses focales sont les coniques doubles du faisceau tangentiel

$$f(u, v, w, h) + \lambda A^2 + \mu(u^2 + v^2 + w^2) = 0; \qquad (1)$$

on déterminera μ en exprimant que l'équation précédente représente une conique double.

D'autre part chacune des quadriques Q_1, Q_2, Q_3 est représentée par une équation de la forme

$$f(u, v, w, h) + \nu(u^2 + v^2 + w^2) = 0, \qquad (2)$$

où l'on prendra successivement pour ν les trois racines de l'équation obtenue en exprimant la condition de l'énoncé. Si l'on considère l'une de ces quadriques, son intersection avec le plan polaire du point A est la conique double du faisceau

$$f(u, v, w, h) + \nu(u^2 + v^2 + w^2) + \rho A^2 = 0. \qquad (3)$$

Ce faisceau tangentiel n'a, en dehors du point A, qu'une seule conique double, comme on peut le voir géométriquement, tous les plans tangents du faisceau étant tangents au cône circonscrit. D'ailleurs, l'équation en ρ obtenue en annulant le discriminant s'abaisserait au premier degré; il est facile de s'en rendre compte en prenant le point A pour origine.

Je vais maintenant démontrer que l'équation en μ obtenue en écrivant que l'équation (1) représente une conique est identique à l'équation en ν obtenue en écrivant que la quadrique représentée par l'équation (2) satisfait aux conditions de l'énoncé. Cela étant, on aura $\nu = \mu$, et comme il n'y a qu'une valeur de ρ telle que l'équation (3) représente une conique double, on aura par conséquent $\rho = \lambda$.

Soient u, v, w les coordonnées du plan double de la conique; elles satisfont aux quatre équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} f'_u + 2\mu u + 2\lambda\alpha A = 0 \\ f'_v + 2\mu v + 2\lambda\beta A = 0 \\ f'_w + 2\mu w + 2\lambda\gamma A = 0 \\ f'_h + 2\lambda A = 0 \end{array}\right\} \qquad (4)$$

et l'on obtiendra l'équation en μ dont il a été question, en éliminant u, v, w, h entre ces quatre équations.

Soient d'autre part u', v', w' les coordonnées du plan polaire du point A par rapport à la quadrique (2); il faut exprimer que ces coordonnées vérifient l'équation

$$f'_h + 2\lambda A = 0,$$

du centre de la quadrique Q, ce qui donne, θ étant une inconnue auxiliaire :

$$\begin{aligned} f'_{u'} + 2\nu u' &= \theta\alpha, \\ f'_{v'} + 2\nu v' &= \theta\beta, \\ f'_{w'} + 2\nu w' &= \theta\gamma, \\ f'_{h'} \qquad\quad &= \theta, \\ f'_{h'} + 2\lambda A &= 0, \end{aligned}$$

ou, en remplaçant dans les trois premières, θ par $f'_{h'}$, c'est-à-dire par $-2\lambda A$:

$$\left.\begin{aligned} f'_{u'} + 2\nu u' + 2\lambda\alpha A &= 0 \\ f'_{v'} + 2\nu v' + 2\lambda\beta A &= 0 \\ f'_{w'} + 2\nu w' + 2\lambda\gamma A &= 0 \\ f'_{h'} + 2\lambda A \qquad\quad &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

ce sont les équations (4) dans lesquelles u, v, w sont remplacés par u', v', w' et μ est remplacé par ν; donc en éliminant u', v', w', h' entre les équations (5), on obtiendra une équation en ν identique à l'équation en μ déduite des équations (4).

3° Les projections sur un plan quelconque des coniques C_1, C_2, C_3 sont homofocales. En effet, prenons le plan de projection pour plan des xy. L'équation tangentielle de la projection sur le plan des xy d'une conique donnée par son équation tangentielle s'obtient en faisant $w = 0$ dans cette équation. Les trois projections considérées ont donc pour équations tangentielles

$$f(u, v, 0, h) + \mu(u^2 + v^2) + \lambda(\alpha u + \beta v + h)^2 = 0,$$

où l'on doit remplacer μ successivement par les trois racines μ_1, μ_2, μ_3 de l'équation en μ. Ces trois coniques sont homofocales à la conique représentée par

$$f(u, v, 0, h) + \lambda(\alpha u + \beta v + h)^2 = 0.$$

Le lieu des foyers des coniques projetées est le lieu des foyers de la conique représentée par l'équation précédente quand on fait varier λ, c'est-à-dire le lieu des foyers d'une conique bitangente à une conique fixe (contour apparent de l'ellipsoïde E sur le plan considéré) en deux points fixes (points de contact des tangentes menées du point A', projection de A).

Ce lieu est une strophoïde oblique ayant pour point double la projection du point A, pour tangentes au point double les bissectrices des tangentes menées de ce point au contour apparent de la quadrique E sur le plan donné, et pour direction asymptotique la projection de la droite OA*.

On peut trouver ce lieu analytiquement. Soient x, y les coordonnées d'un point du lieu. Une droite

$$uX + vY + h = 0$$

passant par ce point, de sorte que $\qquad h = -(ux + vy)$.

Si l'on remplace h par cette valeur dans l'équation de la conique, on devra trouver $u^2 + v^2$ en facteur ; ainsi

$$f(u, v, 0, -(ux + vy)) + \lambda(\alpha x + \beta y - (ux + vy))^2$$

doit être divisible par $u^2 + v^2$. En exprimant cette condition, on aura deux équations du premier degré en λ, entre lesquelles on éliminera λ. En faisant le calcul sur l'équation réduite, on trouve

$$[(\alpha - x)^2 - (\beta - y)^2]xy - (x^2 - y^2 + b^2 - a^2)(\alpha - x)(\beta - y) = 0$$

* Voir la solution géométrique de cette question, t. I, p. 311, de la *Revue de Mathématiques spéciales*. — La solution à laquelle nous renvoyons avait été donnée précisément par M. A. Alayrac.

et en transportant l'origine au point α, β

$$(x^2 - y^2)(x + \alpha)(y + \beta) - [(x + \alpha)^2 - (y + \beta)^2 + b^2 - a^2].xy = 0$$

ou

$$(x^2 + y^2)(\beta x - \alpha y) + \alpha\beta(x^2 - y^2) - (\alpha^2 - \beta^2 + b^2 - a^2)xy = 0.$$

C'est l'équation d'une strophoïde.

A. Alayrac, lycée Saint-Louis. (Prix d'honneur.)

Nous avons reçu une solution de M. Camille Rech (Nancy) et de M. Paul Fages (Montpellier). Nous les publierons dans un prochain numéro.

GÉOMÉTRIE

199. — *Étant données deux coniques, deux triangles admettant, l'un, pour sommets, trois quelconques de leurs points communs, l'autre, pour côtés, trois quelconques de leurs tangentes communes, sont homologiques.*

Soient, en effet, a, b, c les sommets du premier triangle, A, B, C les sommets du second, les notations étant disposées de sorte que d et D désignant respectivement le quatrième point et la quatrième tangente communs aux deux coniques, si la droite ad passe par un sommet α du triangle conjugué commun, les droites A et D se coupent sur le côté opposé $\beta\gamma$. Considérons la conique Γ conjuguée à ce triangle et telle que d ait pour polaire D par rapport à cette courbe. Il est bien évident que a, b et c seront les pôles respectifs de A, B et C relativement à Γ; et, comme on sait que les droites qui joignent les sommets d'un triangle aux pôles des côtés opposés par rapport à une même conique, sont concourantes, la propriété énoncée est démontrée.

Remarque. — Les polaires réciproques des deux coniques données, C et C′, par rapport à la conique Γ, seront aussi tangentes aux droites A, B, C et D, et passeront par les points a, b, c et d. Elles se transformeront donc ainsi, soit en elles-mêmes, soit l'une en l'autre, car, il est bien évident qu'en général ces coniques seront les seules qui satisfassent aux huit conditions imposées à leurs transformées. Mais il est facile de voir qu'il est impossible de trouver une conique telle que deux coniques données se transforment en elles-mêmes par polaires réciproques relativement à elle : car, si ce problème était possible, il le serait évidemment encore dans le cas particulier où il existerait une infinité de triangles inscrits à l'une des coniques et circonscrits à l'autre, et les conclusions qu'on en déduirait ne pourraient évidemment être réalisées. Par suite les deux coniques C et C′ se transforment l'une en l'autre, par rapport à Γ, conique à laquelle cette condition donne quatre déterminations.

On peut, de là, déduire des conclusions intéressantes. On obtient, par exemple, le théorème suivant :

Si une conique C *est harmoniquement circonscrite à une autre,* C′, *inversement,* C′ *est harmoniquement inscrite à* C.

(On dit que C est harmoniquement circonscrite à C′, s'il existe des triangles inscrits à C et conjugués à C′; que C′ est harmoniquement inscrite à C, s'il existe des triangles circonscrits à C′ et conjugués à C).

Ernest Duporcq (école Monge).

200. — *Etant donnés cinq points dans l'espace, les cinq quadriques ayant pour centre l'un d'eux et conjuguées au tétraèdre des quatre autres sont homothétiques.*

Considérons en effet la quadrique admettant pour centre l'un des points donnés A, et conjuguée au tétraèdre BCDE. La droite AB est la direction conjuguée des plans parallèles au plan CDE; de même, les directions de la droite AC et du plan BDE sont conjuguées. Les plans CDE et BDE se coupent suivant la droite DE, dont la direction de plans conjuguée est donc celle du plan ABC. La quadrique considérée est donc telle que la direction conjuguée des plans parallèles à celui qui passe par trois quelconques des points donnés, est celle de la droite déterminée par les deux autres. Les cinq points donnés entrant symétriquement dans la détermination de ces dix couples de directions conjuguées, elles sont communes aux cinq quadriques considérées, qui sont donc homothétiques.

Ernest Duporcq.

---

201. — *Le point de rencontre des diagonales d'un quadrilatère inscriptible à un cercle et circonscrit à une parabole est sur la directrice.*

Soit, en effet, un cercle C, tel qu'il existe un quadrilatère ABCD inscrit à ce cercle et circonscrit à une parabole P: on sait qu'il existera alors une infinité de quadrilatères analogues, et tels que le point H, où concourent leurs diagonales et les droites qui joignent les points de contact de leurs côtés opposés sera fixe. L'un de ces quadrilatères a pour sommets adjacents les ombilics du plan et la droite qui joint les points de contact des côtés opposés passant par ces deux points est la directrice qui passe donc par le point H.

Ernest Duporcq.

---

202. — *Trouver le lieu des points* M *et* M′ *tels que,* A *et* A′ *étant deux points fixes, le quadrilatère* AMA′M′ *soit inscriptible à un cercle, et que la parabole inscrite à ce quadrilatère ait pour foyer un point donné* F. *Enveloppe de la droite* MM′, *et enveloppe de la parabole considérée.*

On sait que le foyer F d'une parabole inscrite à un quadrilatère AMA′M′, est tel que les angles MFM′ et AFA′, ont la même bissectrice intérieure Fx, et qu'on a de plus la relation

$$FM.FM' = FA.FA'.$$

Il résulte de là que, les trois points A, A′ et F restant fixes, si le point M décrit une courbe C, le point M′ décrira la symétrique, relativement à Fx, de la figure inverse de C, par rapport à l'origine d'inversion F et au module FA.FA′. Si donc, le quadrilatère AMA′M′ est inscriptible à un cercle, ce dernier devra se transformer en lui-même, au moyen de cette transformation : il devra donc, bien visiblement, être, soit le cercle C, circonscrit au quadrilatère AαA′α', α et α' désignant les points de Fx distants de F de la longueur $\sqrt{FA.FA'}$, soit le cercle C′, qui coupe orthogonalement le précédent aux points A et A′. Ces deux cercles constituent donc le lieu des points M et M′.

Deux sommets correspondants à un même quadrilatère sont tels que Fx soit la bissectrice intérieure de l'angle MFM′. Si ces points sont sur le cercle C, la droite MM′ et sa symétrique par rapport à la bissectrice extérieure Fy de l'angle AFA′ se coupent évidemment au pôle P de Fx relativement au cercle C: c'est le point où AA′ coupe Fy. On verrait de même que l'enveloppe de MM′ correspondant au cercle C′ est le point P′ ou AA′ coupe Fx.

On voit donc que le point de concours des diagonales des quadrilatères considérés inscrits au

cercle C est le point fixe P. Il résulte du théorème que j'ai démontré dans la question précédente que ce point est commun aux directrices des paraboles inscrites à ces quadrilatères : elles touchent donc la perpendiculaire au milieu de FP. La perpendiculaire au milieu de FP′ serait de même une tangente commune aux paraboles correspondant au cercle C′.

Ernest Duporcq.

---

203. — *Lieu des sommets des paraboles qui, homofocales à une parabole donnée, sont tangentes à deux normales rectangulaires à cette courbe.*

La figure transformée d'une développée de parabole, par polaires réciproques, relativement à un cercle admettant pour centre le foyer de cette courbe est, comme on sait, une cissoïde de Dioclès. Les paraboles considérées se transformeront donc, de cette manière, en des cercles, passant par le point de rebroussement d'une cissoïde, et tels que la corde qu'ils intercepteront sur cette courbe soit vue de ce point sous un angle droit. Comme, enfin, la cissoïde est la transformée par inversion d'une parabole, dont le sommet est l'origine d'inversion, les cercles obtenus sont des figures inverses des cordes interceptées sur une parabole par les côtés d'un angle droit, pivotant autour de son sommet. Ces droites passant par un point fixe, il en est de même des cercles, et, par suite, les paraboles considérées ont une tangente fixe. Il résulte de là que le lieu cherché est un cercle passant par le foyer fixe : on voit aisément que l'autre extrémité du diamètre passant par ce point est le symétrique du sommet de la parabole donnée relativement à son foyer.

Ernest Duporcq.

CONSTRUCTION DU HUITIÈME POINT COMMUN AUX QUADRIQUES

QUI PASSENT PAR SEPT POINTS

On sait qu'une quadrique circonscrite à un tétraèdre conjugué à une quadrique est circonscrite à une infinité de tétraèdres analogues. Il résulte de là que toutes les quadriques qui passent par sept points, A, B, C, D, E, F, G, passent par un huitième, H, qui est, par exemple, le pôle du plan EFG, relativement à la quadrique (Q), conjuguée au tétraèdre ABCD et au triangle EFG. Les arêtes opposées du tétraèdre ABCD coupent le plan P du triangle EFG en des points conjugués à la conique d'intersection de (Q) par ce plan : soient α et β ceux de ces points situés sur AC et BD, et soit m le point où l'arête AB perce le plan P. Toutes les coniques conjuguées au triangle EFG et aux deux points α et β formant évidemment un faisceau linéaire, les polaires d'un point quelconque, m, de leur plan, passent par un point fixe, n : on peut le construire en remarquant (comme on le démontre aisément) que les six droites, qui joignent E aux points F et G, α et β, m et n, sont en involution ; on aura donc aisément les droites En et Fn, par exemple. Les points m et n étant, en particulier, conjugués à la quadrique Q, le plan nCD est donc, relativement à cette surface, le plan polaire du point m, et passe, par conséquent, par le pôle H du plan P, point dont on peut achever la détermination, en construisant de même les plans HBC et HBD, par exemple.

Remarque. — La construction précédente est en défaut si le point n est sur CD : Dans ce cas, il y a une infinité de coniques conjuguées au triangle EFG et aux trois couples de points où ce plan rencontre les arêtes opposées du tétraèdre ABCD. On voit aisément qu'il faut et suffit, pour que cette indétermination se présente, qu'il existe une conique inscrite à la fois aux triangles EFG et au quadrilatère déterminé dans le plan P par les faces du tétraèdre ABCD. Le calcul montre que, dans ces conditions, toutes les quadriques qui passent par les sept points considérés ont en commun une cubique gauche, déterminée par six d'entre eux.

Cette cubique gauche est facile à construire par des plans passant, par exemple, par la droite EF. On peut voir que, si l'on fait une transformation du second ordre conjuguée au tétraèdre ABCD, les points E, F et G ont, dans le cas considéré, leurs transformés sur une droite, qui est la transformée de la cubique.

Ernest Duporcq (école Monge).

NOTE RELATIVE A L'ÉQUATION EN λ

Soient
$$f \equiv Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2By + 2B'x + A'' = 0,$$
$$f_1 \equiv A_1x^2 + \ldots \qquad = 0,$$
les équations de deux coniques; soient de même
$$au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0,$$
$$a_1u^2 + \ldots \qquad = 0,$$
leurs équations tangentielles. On sait que le premier membre de l'équation en λ relative au faisceau
$$(A + \lambda A_1)x^2 + \ldots = 0$$
est
$$f(\lambda) \equiv \Delta + \Theta\lambda + \Theta_1\lambda^2 + \Delta_1\lambda^3, \tag{1}$$
où Δ est le discriminant de f, Δ_1 celui de f_1 et
$$\Theta \equiv A_1a + A'_1a' + A''_1a'' + 2B_1b + 2B'_1b' + 2B''_1b'', \tag{2}$$
$$\Theta_1 \equiv Aa_1 + A'a'_1 + A''a''_1 + 2Bb_1 + 2B'b'_1 + 2B''b''_1. \tag{3}$$

Nous nous proposons de calculer les dérivées $f'(\lambda)$ et $f''(\lambda)$. Nous avons déjà donné l'expression de $f'(\lambda)$. (Voir *Revue de Mathématiques spéciales*, 2e année, p. 287). Pour calculer $f''_{(\lambda)}$, nous remarquerons que l'équation (1) donne
$$\frac{1}{2}f''(\lambda) = \Theta_1 + 3\lambda\Delta_1.$$

Or on a
$$\Delta_1 = A_1a_1 + B''_1b_1 + B'_1b'_1,$$
$$\Delta_1 = B''_1b_1 + A'_1a'_1 + B_1b_1,$$
$$\Delta_1 = B'_1b'_1 + B_1b_1 + A''_1a''_1;$$
donc
$$3\Delta_1 = A_1a_1 + A'_1a'_1 + A''a''_1 + 2B_1b_1 + 2B'_1b'_1 + 2B''_1b''_1. \tag{5}$$
et par suite, en tenant compte des relations (3) et (5),
$$\frac{1}{2}f''(\lambda) = (A + \lambda A_1)a_1 + (A' + \lambda A'_1)a'_1 + (A'' + \lambda A''_1)a''_1 + 2(B+\lambda B_1)b_1 + 2(B' + \lambda B'_1)b'_1 + 2(B'' + \lambda B''_1)b''_1.$$

Il est facile de voir ce que représente la condition $f''(\lambda) = 0$, en supposant que λ soit une racine de l'équation $f(\lambda) = 0$.

Dans ces hypothèses $f + \lambda f_1$ est un produit de deux facteurs du premier degré (distincts ou non), et nous poserons

$$f + \lambda f_1 \equiv (ux + vy + wz)(u_1x + v_1y + w_1),$$

de sorte que

$$A + \lambda A_1 = uu_1, \qquad A' + \lambda A'_1 = vv_1, \qquad A'' + \lambda A''_1 = ww_1,$$

$$2(B + \lambda B_1) = vw_1 + wv_1 \qquad 2(B' + \lambda B'_1) = uw_1 + wu_1, \qquad 2(B'' + \lambda B''_1) = uv_1 + vu_1;$$

alors la condition $f''(\lambda) = 0$ revient à celle-ci :

$$a_1uu_1 + av v_1 + a''_1ww_1 + b(vw_1 + wv_1) + b'(uw_1 + wu_1) + b''(uv_1 + vu_1) = 0;$$

elle exprime donc que les deux sécantes sont conjuguées par rapport à f_1.

Ainsi, quand l'équation $f(\lambda) = 0$ a une racine triple, le point de concours des sécantes correspondantes est sur la conique f_1 et ces sécantes sont conjuguées par rapport à f_1; il en résulte évidemment que l'une d'elles est tangente à f_1 et que l'autre passe par le point de contact de la première.

Ces résultats s'appliquent immédiatement à la discussion de l'intersection de deux coniques.

(B. N.)

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DE L'INÉGALITÉ $x - \sin x < \frac{x^3}{6}$

DANS L'HYPOTHÈSE $x > 0$.

La démonstration donnée dans quelques ouvrages établit seulement que la différence $x - \sin x$ est au plus égale à $\frac{x^3}{6}$. Une modification très simple apportée à la démonstration permet de faire disparaître toute incertitude.

On part de l'identité

$$\sin x = 3 \sin \frac{x}{3} - 4 \sin^3 \frac{x}{3};$$

en remarquant que si l'on suppose $x > 0$, on a

$$\sin x < x \quad \text{et par suite} \quad \sin^3 \frac{x}{3} < \left(\frac{x}{3}\right)^3,$$

on déduit de l'identité précédente :

$$\sin x > 3 \sin \frac{x}{3} - 4\left(\frac{x}{3}\right)^3. \tag{1}$$

De cette inégalité on déduit, en remplaçant x par $\frac{x}{3}$:

$$\sin \frac{x}{3} > 3 \sin \frac{x}{3^2} - 4\left(\frac{x}{3^2}\right)^3, \tag{2}$$

et de même, successivement

$$\sin \frac{x}{3^2} > 3 \sin \frac{x}{3^3} - 4\left(\frac{x}{3^3}\right)^3, \tag{3}$$

$$\sin \frac{x}{3^3} > 3 \sin \frac{x}{3^4} - 4\left(\frac{x}{3^4}\right)^3, \tag{4}$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$\sin\frac{x}{3^{n-1}} > 3\sin\frac{x}{3^n} - 4\left(\frac{x}{3^n}\right)^3. \qquad (n)$$

Nous remplacerons l'inégalité (1) par une égalité, savoir :

$$\sin x = 3\sin\frac{x}{3} - 4\left(\frac{x}{3}\right)^3 + \alpha, \qquad (1)'$$

α étant un nombre positif.

Cela étant, multiplions les deux membres de l'inégalité (2) par 3, ceux de l'inégalité (3) par 3^2, et ainsi de suite, les deux membres de l'inégalité (n) étant multipliés par 3^{n-1}, et ajoutons membre à membre les inégalités obtenues et l'*égalité* (1)'. Il vient, après simplifications évidentes,

$$\sin x > 3^n \sin\frac{x}{3^n} - 4\,\frac{x^3}{27}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \ldots + \frac{1}{9^{n-1}}\right) + \alpha$$

ou

$$\sin x > x\,\frac{\sin\left(\frac{x}{3^n}\right)}{\left(\frac{x}{3^n}\right)} - \frac{4x^3}{27}\cdot\frac{1 - \frac{1}{9^n}}{1 - \frac{1}{9}} + \alpha$$

et, *a fortiori*, en supprimant dans le second membre un terme positif,

$$\sin x > x\,\frac{\sin\left(\frac{x}{3^n}\right)}{\left(\frac{x}{3^n}\right)} - \frac{x^3}{6} + \alpha.$$

Cela posé, si n augmente indéfiniment, $\frac{x}{3^n}$ tend vers zéro, et par suite le rapport $\frac{\sin\left(\frac{x}{3^n}\right)}{\left(\frac{x}{3^n}\right)}$ tend vers 1 ; la limite du second membre de l'inégalité précédente est égale à

$$x - \frac{x^3}{6} + \alpha.$$

On peut donc poser

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6} + \alpha + \beta_n,$$

β_n étant un nombre variable dont la limite est zéro.

La différence *positive*

$$\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \alpha\right) - \beta_n$$

a pour limite

$$\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \alpha\right).$$

Or quand une variable *toujours positive* a une limite, cette limite est positive ou nulle; donc on a le droit d'écrire

$$\sin x \geqslant x - \frac{x^3}{6} + \alpha.$$

et par conséquent

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6},$$

en supposant $x > 0$.

(B. N.)

QUESTIONS PROPOSÉES

204*. — On donne un cercle C et une direction fixe Δ. On prend sur une tangente au cercle à partir du point de contact un segment de longueur constante a. Lieu de la projection de l'extrémité de ce segment sur la parallèle à Δ menée par le point de contact.

(Louis Graux, lycée de Nantes.)

205*. — On donne un point A de l'axe et un point A′ de la tangente au sommet d'une parabole de paramètre $2p$. On demande 1° le lieu du foyer, 2° l'enveloppe de la directrice.

(Pierre Borelli, lycée de Nice.)

206. — Soit une ellipse ayant pour foyers F et F′.

1° Si deux tangentes parallèles sont coupées par une troisième tangente en P et en Q, le quadrilatère PQFF′ n'est inscriptible à un cercle que si les tangentes parallèles sont tangentes aux extrémités du grand axe.

2° Si T est le point où la troisième tangente coupe le grand axe, le produit TP×TQ est indépendant de la longueur du grand axe.

3° Si le petit axe est fixe, le produit TP × TQ constant et la direction PQ fixe, le lieu de P et Q est une hyperbole équilatère qui a pour asymptotes les axes de l'ellipse.

Examiner ce que devient le théorème dans le cas de l'hyperbole.

(Émile Lemoine.)

207. — Étant donné un ellipsoïde, s'il y a un système de trois plans diamétraux conjugués coupant la surface suivant des ellipses ayant des aires égales entre elles et à une aire donnée S^2, il y en a une infinité.

(Émile Lemoine.)

208. — On considère un cercle C et l'un de ses points O. Soit M, un point de la cissoïde droite dont O est le point de rebroussement et dont le cercle donné est le cercle générateur. Trouver le lieu du point d'intersection de OM avec la polaire de M par rapport au cercle C. Même problème pour la strophoïde, O étant le point double.

(C. Élie Bodescu.)

209. — Étant donnée une cissoïde de Dioclès ayant pour point double le point O et pour asymptote la droite AB, on joint le point double O à un point M de la cissoïde; la droite OM rencontre AB en I et l'on prend IP = IM. Trouver l'aire comprise entre la cissoïde et la courbe lieu du point P.

(E. N. Barisien.)

BIBLIOGRAPHIE

Leçons de Cinématique et de Dynamique, suivies de la détermination des centres de gravité, à l'usage des candidats à l'École Polytechnique, par X. Antomari, directeur des Études et professeur de mathématiques spéciales à l'École Monge.

Ce livre a été écrit pour répondre aux récentes modifications du programme d'admission à l'École Polytechnique, qui comprend maintenant : la cinématique du point matériel, la dynamique du point matériel et la statique du solide invariable libre. Dans cette dernière partie, M. Antomari ne traite que la détermination des centres de gravité, renvoyant pour le reste aux *Leçons de statique* de M. Carvallo.

L'ouvrage de M. Antomari est divisé en trois livres précédés d'un chapitre consacré à la définition des vecteurs et à l'exposition de leurs propriétés les plus élémentaires.

Dans le premier livre, l'auteur expose la cinématique du point matériel et étudie la vitesse et l'accélération considérées d'abord comme des grandeurs numériques. Ensuite, après avoir expliqué comment on peut, dans le mouvement rectiligne et uniforme, représenter la vitesse, en grandeur et en signe, par un vecteur dont la valeur algébrique est la

même que celle de la vitesse, et dont la direction est la même que celle du mouvement, il montre avec beaucoup d'élégance et de clarté comment on étend ce mode de représentation aux mouvements variés, rectilignes ou curvilignes. — Comme conséquence naturelle de cette représentation, nous arrivons à l'étude des mouvements projetés et à l'emploi des coordonnées pour l'étude du mouvement d'un point. Ce chapitre se termine par plusieurs applications intéressantes, entre lesquelles nous remarquons l'étude de la projection sur un plan du mouvement circulaire uniforme.

Le problème de la composition des mouvements est posé dans toute sa généralité : il est complètement résolu pour les vitesses. Quant à la composition des accélérations, l'auteur a évité d'entrer dans des développements étrangers au programme, et il s'est borné à examiner le cas où le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation.

Un chapitre d'applications termine ce premier livre. Nous citerons : l'étude du mouvement vibratoire et celle du mouvement d'un point dans l'espace quand les mouvements des projections sur trois axes rectangulaires sont des mouvements vibratoires simples de même durée. Deux problèmes de géométrie : la détermination du rayon de courbure de la cycloïde et celle du rayon de courbure de l'hélice, donnent une application intéressante de la considération de l'accélération comme vecteur.

Le deuxième livre est consacré à la dynamique du point matériel. L'auteur énonce d'abord les deux principes fondamentaux de la dynamique et donne la représentation vectorielle de la force. Le second chapitre montre l'application de ces principes fondamentaux à une question particulière, celle du mouvement des projectiles dans le vide.

Nous arrivons ensuite à la notion de masse et à la définition de la valeur d'une force. L'auteur utilise alors les propriétés qu'il a établies pour définir d'une façon aussi élégante que précise la résultante de plusieurs forces appliquées à un point. Il insiste particulièrement sur ce fait, et c'est là le point important quand on veut faire dériver la statique de la dynamique, qu'il est indifférent pour le point matériel d'être en mouvement ou au repos. Toute cette partie est traitée en quelques pages et présentée d'une façon qui nous a paru nouvelle. — Ces préliminaires posés, il est possible maintenant d'établir les équations du mouvement d'un point matériel soumis à des forces connues. Le paragraphe correspondant est, au point de vue des applications, un des plus importants ; aussi en rencontrons-nous un grand nombre, choisies avec un soin tel qu'elles forment en quelque sorte la suite naturelle des problèmes étudiés en cinématique.

Le travail et la force vive d'un point matériel soumis à l'action de forces quelconques sont étudiés dans un chapitre qui se termine par quelques notions intéressantes sur les surfaces de niveau.

Le chapitre suivant contient l'étude du mouvement d'un point soumis à des forces centrales. L'auteur établit que la trajectoire du mobile est plane et démontre que les aires balayées par le rayon vecteur qui va du point fixe au mobile sont proportionnelles aux temps employés à les décrire. Viennent ensuite l'expression de la vitesse et celle de la force, d'où, par une remarque très simple, cette propriété de la force d'être toujours dirigée du même côté que la concavité de la trajectoire.

Admettant ensuite pour les planètes la loi de Képler, M. Antomari montre comment les résultats précédents permettent d'énoncer la loi de Newton. Ce chapitre se termine par l'étude détaillée du mouvement d'un point attiré par un centre fixe en raison inverse du carré de la distance.

Enfin, le dernier chapitre de la dynamique contient la théorie du mouvement d'un point sur une courbe ou sur une surface fixe, avec quelques notions sur la stabilité de l'équilibre.

Le troisième livre est rempli tout entier par la détermination des centres de gravité. Le lecteur y trouvera, exposées avec beaucoup d'ordre, les propositions les plus connues sur les centres de gravité des solides.

L'ouvrage est suivi de trois notes : dans la première se trouvent démontrées d'une façon élégante et neuve deux propositions de géométrie élémentaire dont on fait quelquefois usage dans la recherche des centres de gravité des figures qui ont un plan diamétral ; les deux autres notes sont relatives au principe des vitesses virtuelles et au principe de d'Alembert.

Nous aurions bien voulu, dans cette analyse incomplète, faire ressortir comme il convient, toutes les qualités de méthode et d'exposition que l'on connaît à l'auteur et qu'on retrouve à chaque pas dans son ouvrage. Malheureusement, nous sommes obligé de nous limiter. Néanmoins, nous insisterons encore une fois sur le choix heureux des applications, qui, tout en éclairant la théorie, rendent aussi attrayante qu'instructive la lecture de ce livre.

Les élèves studieux n'ont pas été oubliés, et ils trouveront à la fin de chaque livre un grand nombre d'exercices et de problèmes dont quelques-uns sont inédits, et qui, tous, sont intéressants.

Pour résumer, nous avons pris le plus vif plaisir à lire l'ouvrage de M. Antomari et à en écrire le compte rendu. Qu'il nous soit permis, en terminant, d'espérer que ces leçons de cinématique et de dynamique recevront un accueil sympathique des professeurs et des élèves de mathématiques spéciales.

A. Maluski

ERRATUM

Page 329 (n° 9, 2e année), 5e et 6e ligne : *lire*.

Les paraboloïdes, inscrits au tétraèdre T, sont harmoniquement inscrits au cône isotrope de sommet H, c'est-à-dire qu'ils sont inscriptibles à des trièdres trirectangles.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

PARIS — IMPRIMERIE CHAIX. — 22042-10-92.

3e Année. N° 2. Novembre 1892.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Concours de 1892.

188. — *Étant donnés un ellipsoïde* E, *de centre* O, *et un cône du second ordre* Q, *de sommet* S, *on considère un trièdre* $O\alpha\beta\gamma$, *dont les arêtes forment un système de diamètres conjugués de l'ellipsoïde et on prend le point d'intersection de chaque arête de ce trièdre avec le plan diamétral qui lui est conjugué dans le cône* Q. *On obtient ainsi trois points* A, B, C *qui déterminent un plan* P.

1° Démontrer que le plan P *passe par un point fixe* F *quand le trièdre* $O\alpha\beta\gamma$ *varie.*

2° Les points S *et* F *déterminent une droite* D ; *trouver le lieu des droites* D *qui passent par un point donné* ω, *lorsque le cône* Q *se déplace en restant égal et parallèle à un cône fixe.*

3° Trouver, dans la même hypothèse, l'enveloppe G *des droites* D *qui sont situées dans un plan donné* H.

4° Trouver le lieu des foyers des courbes G *lorsque le plan* H *se déplace en restant parallèle à une droite donnée.*

Désignons par E′ le cône asymptote de E et par Q′ le cône égal et parallèle au cône Q qui a son sommet au point O. Le cône E′ étant imaginaire, on sait qu'il existe au moins un trièdre conjugué réel commun aux deux cônes de même sommet E′ et Q′ (*). En prenant pour axes les arêtes de ce trièdre, les équations de E′ et de Q′ prennent la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0, \qquad (E')$$

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0. \qquad (Q')$$

Il ne faut pas oublier que les axes choisis ne sont généralement pas rectangulaires.

1° Cherchons le lieu du point d'intersection d'un diamètre variable OM de E avec son plan polaire Π par rapport au cône Q. Soient

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} \qquad (1)$$

les équations du diamètre OM. Si x', y', z' désignent les coordonnées du sommet S de Q, l'équation du plan Π est

$$A\alpha(x - x') + B\beta(y - y') + C\gamma(z - z') = 0. \qquad (2)$$

Par conséquent en éliminant α, β, γ entre les équations (1) et (2), on obtient l'équation du lieu demandé :

$$Ax(x - x') + By(y - y') + Cz(z - z') = 0.$$

(*) Si E était un hyperboloïde, par exemple, ce trièdre conjugué pourrait être en partie imaginaire, comme on le sait par la théorie de l'équation en λ ; ce cas-là ne diffère pas beaucoup, au fond, de celui que nous allons traiter. Mais, de plus, il pourrait arriver (dans le cas où les cônes E′ et Q′ seraient tangents sans être bitangents — ce qui ne peut arriver ici) que ce trièdre conjugué *n'existe pas*. On aurait alors un problème essentiellement différent. C'est pour cela qu'il est important de supposer que E est un ellipsoïde.

On trouve ainsi une quadrique K.

C'est un résultat qu'on aurait pu facilement prévoir par la géométrie; en effet, si on suppose que le cône Q est isotrope, il revient au théorème suivant: *le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point* O *sur les plans qui passent par un point fixe* S, *est la sphère de diamètre* OS.

Les équations (1) et (2) deviennent, par l'introduction de la variable auxiliaire ρ:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha\rho \\ y &= \beta\rho \\ z &= \gamma\rho \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\rho = \frac{A\alpha x' + B\beta y' + C\gamma z'}{A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2}. \tag{4}$$

Ces équations représentent la quadrique K.

Soit
$$ux + vy + wz + h = 0 \tag{5}$$
l'équation du plan P dont il est question dans l'énoncé.

En remplaçant x, y, z par leurs valeurs tirées des équations (3) et (4), cette équation devient

$$(u\alpha + v\beta + w\gamma)(A\alpha x' + B\beta y' + C\gamma z') + h(A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2) = 0. \tag{6}$$

Elle représente, si l'on considère α, β, γ comme des coordonnées courantes, le cône de sommet O qui a pour base l'intersection de la quadrique K par le plan P. Pour que le plan P satisfasse aux conditions de l'énoncé, il faut et il suffit que l'on puisse placer sur ce cône un trièdre formé de trois diamètres conjugués de E (ou, ce qui est la même chose, de E'). Ce problème relatif à deux cônes de même sommet est au fond le même que le problème connu de géométrie plane: étant données deux coniques, exprimer que l'on peut inscrire dans l'une un triangle conjugué à l'autre. Il suffit donc d'écrire que la somme des produits obtenus en multipliant chaque coefficient de l'équation (6) par le coefficient correspondant dans l'équation tangentielle de E', est nulle. On obtient ainsi

$$Aa^2(ux' + h) + Bb^2(vy' + h) + Cc^2(wz' + h) = 0. \tag{7}$$

Cette relation exprime que le plan représenté par l'équation (5) passe par le point fixe F dont les coordonnées x, y, z sont données par les formules

$$\frac{x}{Aa^2x'} = \frac{y}{Bb^2y'} = \frac{z}{Cc^2z'} = \frac{1}{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2}. \tag{8}$$

(Je suppose $Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 \neq 0$; sans quoi le point fixe serait rejeté à l'infini; il est aisé de voir que les résultats définitifs des calculs que nous allons faire seraient les mêmes dans ce cas particulier.)

2° Soient x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 les coordonnées de deux points quelconques de la droite SF. En désignant par λ et λ' deux indéterminées, on sait que l'on a

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda},$$

$$x' = \frac{x_1 + \lambda' x_2}{1 + \lambda'}, \qquad y' = \frac{y_1 + \lambda' y_2}{1 + \lambda'}, \qquad z' = \frac{z_1 + \lambda' z_2}{1 + \lambda'}.$$

Remplaçons x, y, z; x', y', z' par ces valeurs dans les équations (8); celles-ci deviennent

$$\frac{x_1 + \lambda x_2}{Aa^2(x_1 + \lambda' x_2)} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{Bb^2(y_1 + \lambda' y_2)} = \frac{z_1 + \lambda z_2}{Cc^2(z_1 + \lambda' z_2)} = \frac{1 + \lambda}{1 + \lambda'}\frac{1}{M} = \mu, \tag{9}$$

en posant $Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 = M$ et introduisant la valeur commune μ des rapports.

En éliminant $\lambda, \mu, \mu\lambda'$ entre les quatre équations linéaires obtenues en égalant à μ chacun des

rapports (9), on obtient

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & Aa^2x_1 & Aa^2x_2 \\ y_1 & y_2 & Bb^2y_1 & Bb^2y_2 \\ z_1 & z_2 & Cc^2z_1 & Cc^2z_2 \\ 1 & 1 & M & M \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant peut s'écrire (on le voit immédiatement en le développant suivant la règle de Laplace par rapport aux éléments des deux premières colonnes):

$$\Sigma(MAa^2 + BCb^2c^2)(y_1z_2 - y_2z_1)(x_1 - x_2) = 0,$$

les termes non écrits s'obtenant par permutation circulaire des lettres x, y, z, A, B, C et a, b, c.

Si on remarque que

$$MAa^2 + BCb^2c^2 = (Aa^2 + Bb^2)(Aa^2 + Cc^2),$$

on peut encore écrire cette équation, en divisant par le produit $(Bb^2 + Cc^2)(Cc^2 + Aa^2)(Aa^2 + Bb^2)$:

$$\sum \frac{(y_1z_2 - y_2z_1)(x_1 - x_2)}{Bb^2 + Cc^2} = 0.$$

C'est la condition nécessaire et suffisante *pour que deux points soient sur une droite* D. Le lieu des droites D qui passent par un point fixe $\omega(x_1, y_1, z_1)$ s'obtiendra donc en remplaçant x_2, y_2, z_2 par les coordonnées courantes x, y, z; on obtient ainsi

$$\sum \frac{(yz_1 - zy_1)(x - x_1)}{Bb^2 + Cc^2} = 0.$$

C'est un cône du second degré qui a pour sommet le point x_1, y_1, z_1. Il passe par l'origine; le cône parallèle mené par l'origine a pour équation

$$\sum \frac{(yz_1 - zy_1)x}{Bb^2 + Cc^2} = 0.$$

C'est une équation de la forme

$$lx_1yz + my_1zx + nz_1xy = 0,$$

l, m, n étant trois constantes déterminées satisfaisant à la relation

$$l + m + n = 0.$$

On aperçoit immédiatement que ce cône contient les axes de coordonnées et de plus reste le même lorsque le point x_1, y_1, z_1 se déplace sur une droite issue de O.

On connaît donc toujours quatre génératrices du cône de sommet ω: la droite ωO et les trois parallèles aux axes issues de ω. On peut dire de plus que, si l'on considère un point ω' homothétique de ω par rapport au point O, le cône de sommet ω' est *de même* homothétique du cône de sommet ω (c'est-à-dire égal et parallèle). Ces résultats s'expliquent facilement par la géométrie.

3° Soient

$$\begin{cases} u_1x + v_1y + w_1z + h_1 = 0, \\ u_2x + v_2y + w_2z + h_2 = 0 \end{cases}$$

les équations de deux plans; cherchons à quelle condition la droite d'intersection de ces deux plans est une droite D. En écrivant que chacun de ces plans renferme les deux points S et F et remplaçant x, y, z par leurs valeurs en fonction de x', y', z' tirées des équations (8), on obtient

$$\begin{cases} u_1x' + v_1y' + w_1z' + h_1 = 0, \\ u_2x' + v_2y' + w_2z' + h_2 = 0, \\ u_1Aa^2x' + v_1Bb^2y' + w_1Cc^2z' + Mh_1 = 0, \\ u_2Aa^2x' + v_2Bb^2y' + w_2Cc^2z' + Mh_2 = 0. \end{cases}$$

L'élimination de x', y', z' donne le résultat cherché :

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & h_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & h_2 \\ Aa^2u_1 & Bb^2v_1 & Cc^2w_1 & Mh_1 \\ Aa^2u_2 & Bb^2v_2 & Cc^2w_2 & Mh_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Un calcul tout pareil à celui que nous avons fait au paragraphe précédent permet d'écrire cette équation sous la forme

$$\sum \frac{(v_1w_2 - v_2w_1)(u_1h_2 - u_2h_1)}{Bb^2 + Cc^2} = 0.$$

Si u_1, v_1, w_1, h_1 sont les coefficients de l'équation d'un plan donné H (les *coordonnées* de ce plan), l'équation

$$\sum \frac{(vw_1 - wv_1)(uh_1 - hu_1)}{Bb^2 + Cc^2} = 0$$

exprime que le plan variable de *coordonnées* u, v, w, h, passe par une droite D située dans le plan H, c'est-à-dire par une tangente de la courbe G; c'est donc l'équation tangentielle de cette courbe. On voit immédiatement que cette équation représente une parabole tangente aux trois plans de coordonnées. Le cône qui a pour sommet le point O et pour base cette parabole a pour équations tangentielles

$$\begin{cases} h = 0, \\ lu_1vw + mv_1wu + nw_1uv = 0, \end{cases}$$

l, m, n étant les trois constantes déjà introduites. Son équation ponctuelle est par suite

$$l^2u_1^2x^2 + m^2v_1^2y^2 + n^2w_1^2z^2 - 2mnv_1w_1yz - 2nlw_1u_1zx - 2lmu_1v_1xy = 0.$$

On voit que ce cône reste le même lorsque le plan H se déplace parallèlement à lui-même; d'où l'on conclut que si l'on considère deux plans H et H′ homothétiques par rapport au point O, les paraboles correspondantes G et G′ sont homothétiques *de même* (*).

4° Pour trouver le lieu des foyers des paraboles G, on pourrait employer l'équation tangentielle de leur projection sur l'un des plans de coordonnées, équation que l'on sait écrire immédiatement. Il est plus symétrique et plus simple de procéder de la manière suivante :

Considérons un plan H et un point ω dans ce plan : il est clair que les droites D qui sont situées dans le plan H et qui passent par le point ω appartiennent au cône relatif au point ω et sont tangentes à la parabole relative au plan H. Pour que le point ω soit un foyer de la parabole, il faut et il suffit que ces deux droites soient isotropes, c'est-à-dire appartiennent au cône isotrope de sommet ω. Le cône relatif au point ω et le cône isotrope de sommet ω doivent donc avoir deux génératrices communes situées dans le plan H; c'est-à-dire que le plan H doit être un plan sécant commun aux deux cônes. Il suffit donc d'écrire que ces deux cônes ont un plan sécant commun parallèle à une droite donnée.

Soient
$$f(x, y, z) = 2lx_1yz + 2my_1zx + 2nz_1xy = 0,$$
$$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha yz + 2\beta zx + 2\gamma xy = 0$$

les équations des cônes parallèles qui ont pour sommet l'origine (α, β, γ désignent ici les cosinus des angles que font entre eux les axes) ;

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$$

(*) Cette partie du problème, ainsi que la précédente, auraient pu se traiter un peu plus brièvement, si on avait voulu supposer connue la théorie des complexes et en particulier les propriétés des complexes tétraédraux. J'ai préféré donner ici une solution aussi élémentaire que possible et je l'ai fait d'autant plus volontiers qu'on gagne peut-être ainsi plus de clarté qu'on ne perd de concision.

les équations de la droite donnée. Le problème que nous avons à traiter est le même que ce problème connu de géométrie plane : exprimer qu'une des sécantes communes à deux coniques données passe par un point donné.

Il suffit ici d'écrire que l'équation

$$f(x, y, z)\,\varphi(p, q, r) - \varphi(x, y, z)\,f(p, q, r) = 0$$

représente deux plans. Si nous supposons que p, q, r désignent les paramètres directeurs de la droite, on aura $\varphi(p, q, r) = 1$, et la condition cherchee s'écrira

$$\begin{vmatrix} f(p, q, r) & \gamma f(p, q, r) - nz_1 & \beta f(p, q, r) - my_1 \\ \gamma f(p, q, r) - nz_1 & f(p, q, r) & \alpha f(p, q, r) - lx_1 \\ \beta f(p, q, r) - my_1 & \alpha f(p, q, r) - lx_1 & f(p, q, r) \end{vmatrix} = 0.$$

Or,

$$f(p, q, r) = 2lqrx_1 + 2mrpy_1 + 2npqz_1$$

est homogène et du premier degré en x_1, y_1, z_1. Le lieu cherché est donc un cône du troisième degré ayant son sommet au point O. Il était évident géométriquement d'après les propriétés d'homothétie déjà remarquées, que le lieu devait être un cône.

Cette équation paraît malaisée à discuter complètement en général; elle se simplifie notablement dans le cas particulier où les axes sont rectangulaires (c'est ce qui arrive lorsque les axes de l'ellipsoïde E et du cône Q sont parallèles). On a alors $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et l'équation devient, en posant $f(p, q, r) = \mathrm{P}$,

$$\mathrm{P}^3 - (l^2x_1^2 + m^2y_1^2 + n^2z_1^2)\mathrm{P} - 2lmnx_1y_1z_1 = 0.$$

Si l'une des trois quantités p, q, r est nulle, le cône se décompose en un cône du second degré et un plan (l'un des plans de coordonnées). C'est ce qui arrive aussi d'ailleurs dans le cas général; cela résulte de ce fait que toutes les droites situées dans les plans de coordonnées choisis sont des droites D; pour ces plans, la conique G est indéterminée; il en est de même d'ailleurs pour le plan de l'infini. De même toutes les droites issues de l'origine ou parallèles à l'un des axes de coordonnées sont des droites D. Cela résulte immédiatement des propriétés qu'a la courbe G d'être tangente à quatre plans fixes et le cône de sommet ω de passer par quatre points fixes (dont trois à l'infini).

On pourrait facilement faire une discussion complète de ce cas particulier; mais je ne m'y arrête pas. Je préfère indiquer comment on trouverait le lieu des points ω tels que le cône correspondant soit de révolution.

Il faut, pour cela, écrire qu'il est bitangent au cône isotrope; c'est-à-dire qu'il existe un nombre λ tel que tous les mineurs du premier ordre du discriminant de la forme

$$f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z)$$

soient nuls. Ce nombre λ vérifie les relations :

$$\begin{cases} \lambda^2 = (\alpha\lambda - lx_1)^2, \\ \lambda^2 = (\beta\lambda - my_1)^2, \\ \lambda^2 = (\gamma\lambda - nz_1)^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda(\alpha\lambda - lx_1) = (\beta\lambda - my_1)(\gamma\lambda - nz_1), \\ \lambda(\beta\lambda - my_1) = (\gamma\lambda - nz_1)(\alpha\lambda - lx_1), \\ \lambda(\gamma\lambda - nz_1) = (\alpha\lambda - lx_1)(\beta\lambda - my_1). \end{cases}$$

Le premier groupe de relations donne, en désignant par $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ des nombres égaux à $+1$ ou à -1 :

$$\begin{cases} \varepsilon\lambda = \alpha\lambda - lx_1, \\ \varepsilon'\lambda = \beta\lambda - my_1, \\ \varepsilon''\lambda = \gamma\lambda - nz_1. \end{cases}$$

Le second groupe de relations donne entre les ε la seule relation :

$$\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'' = 1.$$

Le lieu cherché se compose donc des quatre droites

$$\frac{lx_1}{\alpha -} = \frac{my_1}{\beta - \varepsilon'} = \frac{nz_1}{\gamma - \varepsilon''} \qquad \left(\begin{array}{lll} \varepsilon = \pm 1 & \varepsilon' = \pm 1 & \varepsilon'' = \pm 1 \\ & \varepsilon\varepsilon'\varepsilon'' = +1 & \end{array}\right)$$

Émile Borel,
élève sortant de l'École Normale Supérieure.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1892

SECONDE SOLUTION (*)

Traitons d'abord un problème plus général. Soient E, S deux quadriques quelconques et un point P;

$$E = 0, \qquad S = 0, \qquad P = 0$$

leurs équations en coordonnées tangentielles (les coordonnées rectilignes correspondantes étant rectangulaires).

L'équation
$$E + \mu P^2 = 0 \tag{Q}$$
représente le faisceau des quadriques circonscrites à la quadrique E le long de la courbe de contact du cône circonscrit à E, ayant le point P pour sommet. En donnant à μ une valeur particulière, l'équation précédente définit une quadrique déterminée Q.

Une quadrique quelconque Σ inscrite dans la développable enveloppe des plans tangents communs aux deux quadriques E, S a pour équation

$$E + \lambda S = 0. \tag{Σ}$$

Considérons la quadrique Σ' inscrite dans la développable (Q, S) et représentée par l'équation

$$E + \mu P^2 + \lambda S = 0, \tag{Σ'}$$

λ ayant la même valeur que dans l'équation précédente. Les deux quadriques Σ et Σ' sont circonscrites, la courbe de contact étant la trace d'un cône circonscrit ayant le point P pour sommet.

Considérons un plan Π que nous prendrons pour plan des xy et un point H quelconque ayant pour équation

$$\alpha u + \beta v + \gamma w + \delta = 0. \tag{1}$$

L'équation de la courbe d'intersection par le plan Π du cône de sommet H circonscrit à une surface quelconque représentée par l'equation

$$F(u, v, w) = 0 \tag{2}$$

s'obtient en éliminant w entre les équations (1) et (2); en d'autres termes cette courbe a pour équation tangentielle, dans le plan Π,

$$F\left(u, v, -\frac{\alpha u + \beta v + \delta}{\gamma}\right) = 0.$$

(*) Voir l'énoncé et une première solution à la page 6 du dernier numéro.

En particulier, en appliquant ce résultat à la quadrique Σ', on obtient

$$e + \mu p^2 + \lambda s = 0,$$

où e, p, s désignent respectivement ce que deviennent E, P, S quand on y remplace w par $-\dfrac{\alpha u + \beta v + \delta}{\gamma}$.

En outre, les équations

$$e = 0, \quad p = 0, \quad s = 0, \quad e + \mu p^2 = 0, \quad e + \lambda s = 0$$

représentent les traces sur le plan H des différents cônes de sommet H circonscrits respectivement aux quadriques

$$\mathrm{E}, \quad \mathrm{P}, \quad \mathrm{S}, \quad \mathrm{E} + \mu \mathrm{P}^2, \quad \mathrm{E} + \lambda \mathrm{S}.$$

Nous poserons $\quad e + \mu p^2 \equiv q, \quad e + \lambda s \equiv \sigma, \quad e + \mu p^2 + \lambda s \equiv \sigma'.$

On voit que les coniques σ, σ', respectivement inscrites dans les quadrilatères circonscrits aux coniques (e, s), (q, s) sont bitangentes, les tangentes communes étant menées du point p.

Pour appliquer ce qui précède au problème du concours général, nous prendrons pour E, Q et P les deux quadriques et le point donné. S sera remplacée par le cercle de l'infini, de sorte que

$$\mathrm{S} \equiv u^2 + v^2 + w^2.$$

Alors Σ, représenté par $\quad \mathrm{E} + \lambda \mathrm{S} = 0,$

est une quadrique homofocale à E ; Σ', définie par

$$\mathrm{E} + \mu \mathrm{P}^2 + \lambda \mathrm{S} = 0,$$

est une quadrique homofocale à Q. Pour une même valeur de λ, Σ et Σ' sont circonscrites le long de la courbe de contact du cône circonscrit à Σ et de sommet P.

Si nous considérons en particulier les trois focales de Q, il leur correspond trois homofocales de E, qui les admettent comme courbes de contact de cônes circonscrits de sommet P.

Si nous prenons maintenant un point H et si nous considérons les traces des cônes de sommet H circonscrits aux quadriques Σ' sur le plan H, les équations tangentielles de ces courbes seront

$$e + \mu p^2 + \lambda \mathrm{S} = 0,$$

où

$$\mathrm{S} = u^2 + v^2 + \frac{(\alpha u + \beta v + \delta)^2}{\gamma^2}.$$

Pour que ces coniques soient homofocales, il faut et il suffit que l'on ait

$$\alpha^2 = \beta^2, \quad \alpha\beta = 0, \quad \delta = 0,$$

et par suite $\alpha = 0$, $\beta = 0$, (on suppose d'ailleurs $\gamma \neq 0$, le point H n'étant pas dans le plan H). Il en résulte que l'équation de H est $w = 0$; c'est donc le point à l'infini dans la direction perpendiculaire au plan H. Par suite, si l'on effectue sur un plan quelconque des projections orthogonales, on obtient des coniques homofocales, et ce sont les seules projections qui donnent ce résultat.

Ceci a lieu, en particulier, pour les plans principaux de la quadrique E; parmi les coniques homofocales trouvées se trouvent les projections des trois focales de Q.

Il reste à trouver le lieu des foyers des coniques $e + \mu p^2$, quand μ varie. Or les deux coniques $e + \lambda s$, $e + \lambda s + \mu p^2$ sont bitangentes aux points de contact des tangentes menées de p; parmi les coniques homofocales de q je considère les foyers de cette conique. Il existe une homofocale de s pour laquelle ces foyers sont les points de contact des tangentes issues de p. Il en résulte que le lieu des foyers de q est le même que le lieu des points de contact des tangentes issues de p aux homofocales de e. Or on sait que ce lieu est une strophoïde, dont les tangentes au point double sont les tangentes aux deux homofocales de e qui y passent.

(Camille Rech, à Nancy.)

TROISIÈME SOLUTION

Soient (α, β, γ) les coordonnées du point donné A. L'équation de Q est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 + \lambda\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} - 1\right)^2 = 0,$$

les axes étant les axes de symétrie de l'ellipsoïde donné E.

Les équations des focales de cette quadrique s'obtiennent en écrivant que l'équation

$$f(x, y, z, t) \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 + \lambda\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} - 1\right)^2 - \mu[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2] = 0$$

représente un système de deux plans, ou, en d'autres termes, que les quatre plans

$$f'_x = 0, \qquad f'_y = 0, \qquad f'_z = 0, \qquad f'_t = 0$$

passent par une même droite.

Si l'on pose

$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} - 1 \equiv \mathrm{P},$$

les équations de ces quatre plans peuvent s'écrire :

$$x = \frac{\lambda \mathrm{P}\alpha + \mu a^2 x_0}{\mu a^2 - 1}, \qquad y = \frac{\lambda \mathrm{P}\beta + \mu b^2 y_0}{\mu b^2 - 1}, \qquad z = \frac{\lambda \mathrm{P}\gamma + \mu c^2 z_0}{\mu c^2 - 1},$$

$$x x_0 + y y_0 + z z_0 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + \frac{1 + \lambda \mathrm{P}}{\mu}.$$

En coupant ces quatre plans par un plan défini par l'équation

$$\lambda \mathrm{P} = \nu,$$

on doit obtenir quatre droites concourantes, et cela quel que soit ν, et cette condition est évidemment suffisante. En d'autres termes, exprimons que les équations

$$x = \frac{\alpha\nu + \mu a^2 x_0}{\mu a^2 - 1}, \qquad y = \frac{\beta\nu + \mu b^2 y_0}{\mu b^2 - 1}, \qquad z = \frac{\gamma\nu + \mu c^2 z_0}{\mu c^2 - 1},$$

$$x x_0 + y y_0 + z z_0 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + \frac{1 + \nu}{\mu},$$

$$\lambda \mathrm{P} = \nu$$

sont compatibles, quel que soit ν. On obtient immédiatement :

$$\frac{\mu a^2 x_0^2}{\mu a^2 - 1} + \frac{\mu b^2 y_0^2}{\mu b^2 - 1} + \frac{\mu c^2 z_0^2}{\mu c^2 - 1} = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + \frac{1}{\mu}. \tag{1}$$

$$\frac{\alpha x_0}{a^2 - \frac{1}{\mu}} + \frac{\beta y_0}{b^2 - \frac{1}{\mu}} + \frac{\gamma z_0}{c^2 - \frac{1}{\mu}} - 1 = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\alpha^2}{a^2(\mu a^2 - 1)} + \frac{\beta^2}{b^2(\mu b^2 - 1)} + \frac{\gamma^2}{c^2(\mu c^2 - 1)} - \frac{1}{\lambda} = 0. \tag{3}$$

Par suite les focales cherchées sont définies par les équations

$$\frac{x^2}{a^2 - \frac{1}{\mu}} + \frac{y^2}{b^2 - \frac{1}{\mu}} + \frac{z^2}{c^2 - \frac{1}{\mu}} - 1 = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\alpha x}{a^2 - \frac{1}{\mu}} + \frac{\beta y}{b^2 - \frac{1}{\mu}} + \frac{\gamma z}{c^2 - \frac{1}{\mu}} - 1 = 0, \tag{5}$$

dans lesquelles μ est l'une des trois racines de l'équation

$$\frac{\alpha^2}{a^2-\frac{1}{\mu}}+\frac{\beta^2}{b^2-\frac{1}{\mu}}+\frac{\gamma^2}{c^2-\frac{1}{\mu}}=\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}+\frac{1}{\lambda}. \tag{6}$$

Or les coordonnées du centre de la quadrique Q sont données par les équations

$$x+\lambda\alpha P=0,$$
$$y+\lambda\beta P=0,$$
$$z+\lambda\gamma P=0.$$

En multipliant par $\frac{\alpha}{a^2}, \frac{\beta}{b^2}, \frac{\gamma}{c^2}$ et ajoutant, on obtient

$$P+1+\lambda P\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)=0,$$

d'où

$$\lambda P=-\frac{1}{\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}+\frac{1}{\lambda}};$$

et par suite les coordonnées de ce centre sont

$$x=\frac{\alpha}{\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}+\frac{1}{\lambda}},\qquad y=\frac{\beta}{\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}+\frac{1}{\lambda}},\qquad z=\frac{\gamma}{\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}+\frac{1}{\lambda}}.$$

Cela posé, l'équation (4) représente, pour chaque valeur de μ, une quadrique homofocale à l'ellipsoïde E; le plan polaire du point A est représenté par l'équation (5), et l'équation (6) exprime que ce plan passe par le centre de la quadrique Q. Enfin les équations (4) et (5) représentent les coniques (Q_1, P_1), (Q_2, P_2), (Q_3, P_3) quand on y remplace μ par les racines μ_1, μ_2, μ_3 de l'équation (6), et ces coniques sont, d'après ce que nous venons de voir, précisément les focales des quadriques Q_1, Q_2, Q_3. Les deux premières parties sont donc établies.

Considérons maintenant la conique C_1

$$\left.\begin{aligned}
&(Q_1)\qquad \frac{x^2}{a^2-\frac{1}{\mu_1}}+\frac{y^2}{b^2-\frac{1}{\mu_1}}+\frac{z^2}{c^2-\frac{1}{\mu_1}}-1=0,\\
&(P_1)\qquad \frac{\alpha x}{a^2-\frac{1}{\mu_1}}+\frac{\beta y}{b^2-\frac{1}{\mu_1}}+\frac{\gamma z}{c^2-\frac{1}{\mu_1}}-1=0.
\end{aligned}\right\}\ (C_1)$$

Pour que la droite représentée par les équations

$$P_1=0, \tag{5}$$
$$ux+vy+wz-1=0 \tag{7}$$

soit tangente à cette conique, il faut et il suffit que les plans tangents menés par cette droite à la quadrique Q_1 soient confondus.

Désignons pour un instant $a^2-\frac{1}{\mu_1}$, $b^2-\frac{1}{\mu_1}$, $c^2-\frac{1}{\mu_1}$ par A, B, C. L'équation d'un plan passant par la droite donnée étant

$$\frac{Au+\lambda\alpha}{A(1+\lambda)}x+\frac{Bv+\lambda\beta}{B(1+\lambda)}y+\frac{Cw+\lambda\gamma}{C(1+\lambda)}z-1=0, \tag{8}$$

la condition pour que ce plan soit tangent à la quadrique Q_1 est

$$\frac{1}{A}(Au+\lambda\alpha)^2+\frac{1}{B}(Bv+\lambda\beta)^2+\frac{1}{C}(Cw+\lambda\gamma)^2-(1+\lambda)^2=0.$$

Écrivons que cette équation a ses racines égales, ce qui donne

$$\left[\left(a^2-\frac{1}{\mu_1}\right)u^2+\left(b^2-\frac{1}{\mu_1}\right)v^2+\left(c^2-\frac{1}{\mu_1}\right)w^2-1\right]\left[\frac{\alpha^2}{a^2-\frac{1}{\mu_1}}+\frac{\beta^2}{b^2-\frac{1}{\mu_1}}+\frac{\gamma^2}{c^2-\frac{1}{\mu_1}}-1\right]-(\alpha u+\beta v+\gamma w-1)^2=0.$$

L'équation tangentielle de la projection de C_1 sur le plan des xy s'en déduit aisément, car si la droite définie par les équations

$$P_1 = 0, \qquad ux + vy - 1 = 0$$

est tangente à la conique C_1, elle est aussi tangente à sa projection sur le plan des xy ; il suffit donc de remplacer w par zéro dans l'équation précédente, ce qui donne

$$\left[\left(a^2-\frac{1}{\mu_1}\right)u^2+\left(b^2-\frac{1}{\mu_1}\right)v^2-1\right]\left[\frac{\alpha^2}{a^2-\frac{1}{\mu_1}}+\frac{\beta^2}{b^2-\frac{1}{\mu_1}}+\frac{\gamma^2}{c^2-\frac{1}{\mu_1}}-1\right]-(\alpha u+\beta v-1)^2=0.$$

En posant, pour abréger,

$$\frac{\alpha^2}{a^2-\frac{1}{\mu_1}}+\frac{\beta^2}{b^2-\frac{1}{\mu_1}}+\frac{\gamma^2}{c^2-\frac{1}{\mu_1}}-1=K,$$

cette équation devient

$$(a^2u^2+b^2v^2-1)K-(\alpha u+\beta v-1)^2-\frac{K}{\mu_1}(u^2+v^2)=0,$$

ce qui prouve que la projection de C_1 est homofocale à la conique Γ définie par l'équation

$$(a^2u^2+b^2v^2-1)K-(\alpha u+\beta v-1)^2=0. \qquad (9)$$

Il en serait de même pour les coniques C_2 et C_3 ; car on doit remarquer que $K=\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}-1+\frac{1}{\lambda}$, de sorte que les projections de C_1, C_2, C_3 sont homofocales à Γ.

Le lieu des foyers de ces projections n'est pas autre chose que le lieu des foyers des coniques Γ, quand on fait varier K. On sait que ce lieu est une strophoïde.

Paul Fages (Montpellier.)

REMARQUES SUR LE PROBLÈME DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1892)

Les deux premières parties de la question sont des conséquences des propriétés de deux coniques C, C′ passant par deux points donnés D, D′. Si on les coupe par un sécante Δ de direction donnée, qui rencontre C en E et F, C′ en E′ et F′ et DD′ en M, on aura, en vertu d'un théorème de Newton, λ et μ désignant deux constantes,

$$ME.MF = \lambda.MD.MD'.$$
$$ME'.MF' = \mu.MD.MD'.$$

Supposons que la conique C soit une conique à centre et que C′ ait DD′ pour diamètre conjugué à la direction Δ ; dans ce cas $ME' = -MF'$, et par suite

$$ME.MF = -\frac{\lambda}{\mu}.\overline{ME'}^2;$$

donc si $\lambda+\mu=0$, $\qquad ME.MF = \overline{ME'}^2.$

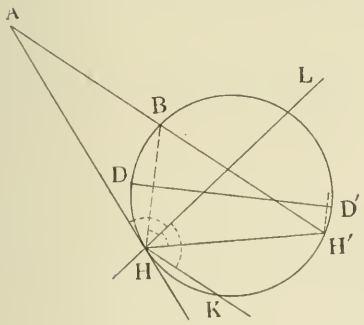
Alors C′ passe par les points de contact H, H′ des tangentes à la conique C, qui sont parallèles à Δ.

Or si l'on suppose que C′ soit un cercle ayant pour diamètre DD′ et que Δ soit perpendiculaire à DD′, on a $\mu = 1$ pour le cercle, et si C est une hyperbole équilatère, on sait que ρ désignant la longueur d'un demi-diamètre, le demi-diamètre perpendiculaire a pour longueur ρi, de sorte que $\lambda = -1$; on a donc bien $\lambda + \mu = 0$, ce qui démontre la proposition. On voit bien en outre que si Δ est parallèle à un diamètre imaginaire de l'hyperbole, les points H et H′ sont réels, et par suite le cercle et l'hyperbole auront quatre points réels.

. . . . . .

La quatrième partie peut se démontrer comme suit :

Menons par le point H une parallèle HL à l'une des asymptotes de l'hyperbole; tirons AH′ et BH′, puis menons HK parallèle à AH′. Les cordes AH et AH′ étant supplémentaires, font des angles égaux avec les asymptotes; par suite



$$\widehat{AHL} = \widehat{LHK}.$$

En second lieu, HB étant la tangente en H à l'hyperbole, on a aussi

$$\widehat{BHL} = \widehat{LHH'};$$

on en conclut que $\widehat{AHB} = \widehat{KHH'}$.

Or $\widehat{AHB} = \widehat{BH'H}$, $\widehat{KHH'} = \widehat{AH'H}$;

les angles AH′H et BH′H étant égaux, les lignes AH′ et BH′ se confondent, autrement dit AB passe par le point H′.

(P. Barbarin, professeur au lycée de Bordeaux.)

Nous n'avons pas reproduit la démonstration de la troisième partie, qui est identique à celle que nous avons déjà publiée.

Faisons une transformation homographique de la figure de façon que les deux points D et D′ deviennent les points cycliques ; les deux coniques deviennent des cercles, la droite de l'infini de la première figure se transforme en une droite de la deuxième figure qui coupe les deux cercles en quatre points conjugués harmoniques. Mais cette droite dans la première figure passe par le pôle de DD′ par rapport à l'une des coniques; donc, dans la deuxième figure, sa transformée passe par le centre d'un des cercles ; les deux cercles sont alors orthogonaux, la première et la quatrième parties du problème sont immédiates.

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE (Concours de 1892)

189. — *On donne deux droites rectangulaires* Ox, Oy.
On prend sur Ox *un point* A, *sur* Oy *un point* B, *de telle sorte que* OA = OB.
On considère toutes les coniques tangentes en A *à* Ox *et en* B *à* Oy.
On demande :
1° L'équation générale de ces coniques ;
2° Le lieu de leurs sommets ;
3° Le lieu de leurs foyers. (Ce dernier lieu devra être déterminé par la géométrie et par le calcul.)

1° L'équation de la droite AB étant

$$x + y - a = 0,$$

l'équation générale des coniques considérées sera

$$f(x, y) = 2\lambda xy + (x + y - a)^2 = 0. \qquad (1)$$

2° Le lieu des sommets s'obtiendra en éliminant λ entre l'équation générale des coniques (1) et l'équation quadratique des axes, qui peut s'écrire (puisque A = C)

$$(f'_x - f'_y)(f'_x + f'_y) = 0,$$

ou

$$(x - y)[\lambda(x + y) + 2(x + y - a)] = 0.$$

On voit ainsi que l'un des axes est la bissectrice de l'angle xOy, ce qui était évident par raison de symétrie; cette bissectrice fait donc partie du lieu des sommets.

Nous aurons le lieu des sommets situés sur l'autre axe en éliminant λ entre l'équation (1) et l'équation

$$\lambda(x + y) + 2(x + y - a) = 0.$$

On obtient, sans difficulté, après avoir supprimé le facteur $x + y - a$ correspondant à la conique singulière formée par la droite double AB, l'équation du lieu

$$(x - y)^2 - a(x + y) = 0,$$

qui représente une parabole circonscrite au triangle AOB et ayant son sommet au point O.

3° Les foyers d'une conique représentée par l'équation générale (axes rectangulaires) sont les points communs aux hyperboles focales définies par les équations

$$(A - C) f(x, y) = \left(\frac{1}{2} f'_x\right)^2 - \left(\frac{1}{2} f'_y\right)^2,$$

$$B f(x, y) = \frac{1}{2} f'_x \cdot \frac{1}{2} f'_y.$$

Dans le cas présent A = C; par suite la première équation se décompose en deux, savoir :

$$f'_x - f'_y = 0 \qquad \text{et} \qquad f'_x + f'_y = 0,$$

c'est-à-dire

$$x - y = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda(x + y) + 2(x + y - a) = 0. \qquad (2)$$

La première représente la bissectrice de l'angle xOy; cette droite fait donc partie du lieu, et ce résultat pouvait se prévoir, car nous avons vu que cette droite est axe des coniques (1).

Il reste à éliminer λ entre la dernière équation et l'équation

$$(\lambda + 1) f(xy) - \frac{1}{2} f'_x \cdot \frac{1}{2} f'_y = 0$$

ou

$$(\lambda + 1)(2\lambda xy + P^2) - (\lambda y + P)(\lambda x + P) = 0.$$

P désignant $x + y - a$.

Cette équation peut encore s'écrire

$$(\lambda^2 + 2\lambda)xy + \lambda P^2 - \lambda P(x + y) = 0.$$

ou, en divisant par λ,

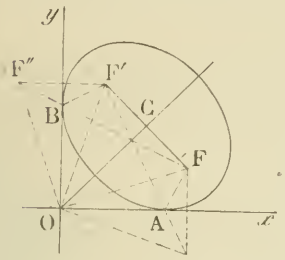
$$(\lambda + 2)\, xy - a(x + y - a) = 0. \qquad (3)$$

L'élimination ne présente aucune difficulté, car on tire de l'équation (2)

$$\lambda + 2 = \frac{2a}{x + y}$$

et en remplaçant dans l'équation (3), on a

$$x^2 + y^2 - a(x + y) = 0,$$



équation qui représente le cercle circonscrit au triangle AOB.

Solution géométrique. — Soient F et F′ les deux foyers de la conique (supposée être une ellipse). Menons la droite FB et abaissons de F′ une perpendiculaire sur OB; ces deux droites se rencontrent en F″. Puisque OF″ = OF′ = OF, le triangle FOF″ est isocèle. L'angle FOF″ étant droit, il en résulte que l'angle OF″F et par suite l'angle BF′O = 45°; il en est de même de son égal AF′O.

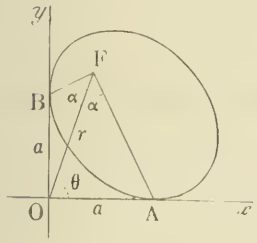
L'angle AF′B est donc droit; le point F′ appartient au cercle décrit sur AB comme diamètre, c'est-à-dire que le lieu des foyers est le cercle décrit sur AB comme diamètre.

Poyeton (Jean-Marie), élève au pensionnat Saint-Louis de Saint-Étienne admis le premier à l'école des Mines.

M. le capitaine Barisien a obtenu le lieu des foyers en utilisant les coordonnées polaires :

Soit $\qquad OF = r, \qquad \theta = \widehat{FOA}.$

On sait que les angles BFO et OFA sont égaux. Si α désigne la valeur commune de ces deux angles, nous avons dans les triangles FOA et FOB,



$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin(\alpha + \theta)}{r},$$

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\cos(\theta - \alpha)}{r}.$$

On en déduit

$$\sin(\alpha + \theta) = \cos(\theta - \alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - \theta\right),$$

c'est-à-dire

$$\alpha + \theta = 2k\pi + \alpha + \frac{\pi}{2} - \theta$$

ou

$$\alpha + \theta = 2k\pi + \pi - \alpha - \frac{\pi}{2} + \theta.$$

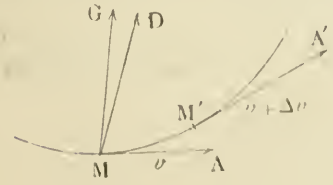
La première relation donne $\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$, c'est-à-dire $\theta = \frac{\pi}{4}$ ou $\theta = \frac{3\pi}{4}$; on obtient ainsi la bissectrice de l'angle xOy.

La deuxième relation donne $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$, c'est-à-dire $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et par suite $r = a(\sin\theta + \cos\theta)$: c'est l'équation du cercle circonscrit au triangle AOB.

COMPOSANTES TANGENTIELLE ET NORMALE DE L'ACCÉLÉRATION

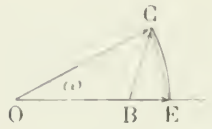
Soient M et M′ les positions d'un mobile aux époques t et $t + \Delta t$, et soient MA et M′A′ les vitesses correspondantes, que nous représenterons par v et $v + \Delta v$.

Menons par un point fixe quelconque O des droites OB, OC respectivement parallèles et égales à MA et M′A′ et de mêmes sens. On appelle *accélération* au temps t, la limite du rapport $\frac{BC}{\Delta t}$ quand Δt tend vers zéro. D'une manière plus précise, si l'on mène par le point M une droite MD parallèle à BC et de même sens et ayant pour longueur $\frac{BC}{\Delta t}$, cette droite tend



vers une limite représentée en grandeur et direction par MG. C'est ce segment MG qui représente en grandeur et direction l'accélération du mobile en M.

Cela posé, si l'on prend sur OB un segment OE égal a OC et dirigé dans le même sens que OB, on voit que BC est la résultante de BE et EC et par suite $\frac{BC}{\Delta t}$ est la résultante de $\frac{BE}{\Delta t}$ et de $\frac{EC}{\Delta t}$.



Or $\frac{BE}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, donc $\lim \frac{BE}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$.

En second lieu, si l'on décrit un arc de cercle ayant pour centre O et pour rayon OC, on a

$$\lim \frac{EC}{\Delta t} = \lim \frac{\text{arc EC}}{\Delta t} = \lim \frac{(v + \Delta v)\omega}{\Delta t},$$

ω désignant l'angle infiniment petit BOC.

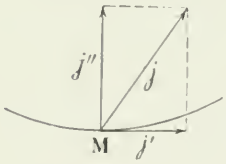
Mais en posant arc MM′ = Δs, on peut écrire

$$(v + \Delta v)\frac{\omega}{\Delta t} = (v + \Delta v)\frac{\Delta s}{\Delta t} \times \frac{\omega}{\Delta s},$$

et l'on sait que $\lim \frac{\omega}{\Delta s} = \rho$, ρ désignant le rayon de courbure de l'arc AB au point M; $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ a d'ailleurs pour limite v, donc enfin

$$\lim \frac{EC}{\Delta t} = \frac{v^2}{\rho}.$$

En outre, la direction de EC a pour limite la normale principale en M; par conséquent, si l'on porte sur la tangente en M, dans le sens du mouvement, une longueur j' égale à $\frac{dv}{dt}$ et sur la normale principale en M une longueur $j'' = \frac{v^2}{\rho}$, cette longueur ayant le même sens que le rayon de courbure en M, la diagonale du rectangle construit sur ces deux segments est l'accélération totale j.



La composante j' se nomme la composante *tangentielle*, et j'' est la composante *normale*.

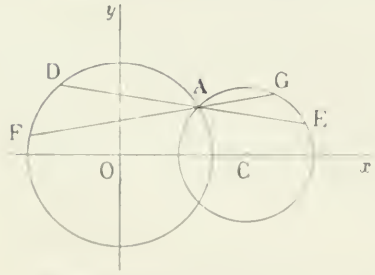
CONCOURS DE 1892 *(Suite)*.

ECOLE CENTRALE

Deuxième session.

Géométrie analytique.

210. — On donne deux axes rectangulaires et un point A dont les coordonnées sont p et q. Par ce point on fait passer deux cercles, dont l'un a pour centre l'origine et l'autre un point C de l'axe des x dont l'abscisse est a.



Par le point A on mène deux sécantes DAE, FAG ayant une longueur commune donnée $2l$ (les points D et F sont sur l'une des circonférences; et les points E et G sont sur l'autre).

1° Former l'équation générale des coniques Δ passant par les points d'intersection des deux sécantes DAE, FAG avec l'axe des y et la parallèle à cet axe menée par le point C.

2° Si l'on assujettit une des coniques Δ à passer par un point P du plan, reconnaître le genre de cette conique d'après la position du point P.

3° Déterminer le lieu du centre des coniques Δ.

4° En faisant varier l, trouver le lieu du point de rencontre des cordes DF, EG.

(10 octobre, de 7 h. 1/2 à 11 h. 1/2.)

Calcul trigonométrique.

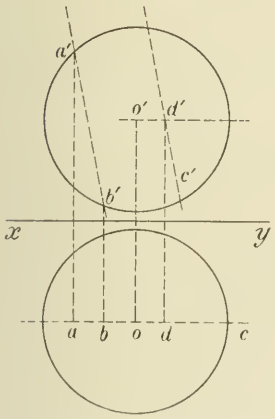
Calculer les côtés d'un triangle et la surface de ce triangle, connaissant le rayon r du cercle inscrit et deux angles A, B.

$$r = 347^m,5432, \qquad A = 102^\circ\ 25'\ 43'',\ 7, \qquad B = 42^\circ\ 37'\ 24'',\ 5.$$

(10 octobre, de 2 h. 1/2 à 4 h..)

Géométrie descriptive.

211. — On donne une sphère pleine, on la coupe par un cylindre, on enlève de la sphère la partie qui est dans l'intérieur du cylindre, on demande de représenter par ses projections la sphère solide dans laquelle on a pratiqué ainsi une entaille cylindrique.



Le centre de la sphère est projeté en o, o' ; les points o et o' sont à $0^m,102$ de la ligne de terre et la droite oo' est au milieu de la feuille; le rayon de la sphère a $0^m,092$ de longueur.

La surface cylindrique de l'entaille est engendrée par la droite $(ab,\ a'b')$ qui tourne autour de l'axe $(cd,\ c'd')$. On a $oa = 0^m,061$, $ob = od = 0^m,031$.

On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour déterminer :

1° Un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point;

2° Les points situés sur les contours apparents de la sphère et du cylindre;

3° Le point le plus haut en projection verticale ;

4° Le point le plus à droite en projection verticale.

Titre extérieur : INTERSECTION DE SURFACES.

Titre intérieur : SPHÈRE ENTAILLÉE PAR UN CYLINDRE.

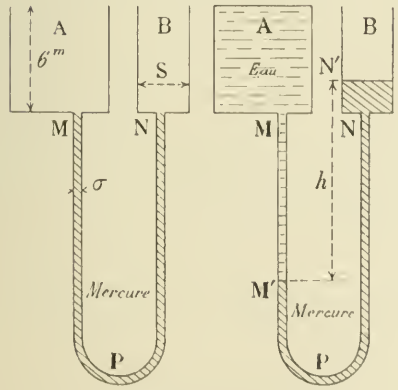
Les titres, en lettres dessinées, sont de rigueur.

Le cadre a $0^m,45$ sur $0^m,27$. La ligne de terre est parallèle aux petits côtés du cadre et à $0^m,205$ du petit côté inférieur.

(11 octobre, de 7 h. 1/2 à 11 h. 1/2)

Physique et chimie.

I. — **212.** — Deux vases A et B, d'une profondeur de 6^m, sont réunis par un tube MNP de grande longueur rempli de mercure; les ouvertures MN sont dans un même plan horizontal.



On verse dans le vase A de l'eau, jusqu'à ce qu'il en soit complètement rempli; l'eau refoule le mercure du tube en M' d'un côté, en N' de l'autre.

On demande d'évaluer la distance h des niveaux M'N', sachant que le rapport $\frac{\sigma}{S}$ des sections du tube MNP et du vase B est égal à $\frac{1}{10}$ et que la densité du mercure est 13,59.

II. — Un rayon de lumière jaune tombe, sous une incidence i, de l'air sur la surface plane de séparation de l'air et d'un milieu M dont l'indice de réfraction relatif à l'air est m.

On demande d'expliquer la construction d'Huyghens permettant de trouver la position du rayon réfracté.

III. — De l'eau oxygénée.

IV. — Établir, à l'aide de l'eudiomètre à mercure, la composition du gaz des marais.

(11 octobre, de 1 h. 1/2 à 4 h. 1/2).

QUESTIONS PROPOSÉES

*213. — Etant donnés un cercle et deux diamètres rectangulaires AA′, BB′, on prend un point quelconque C sur le cercle et l'on mène les droites BC, B′C qui coupent AA′ en D et E. Par ces points on mène des parallèles à BB′. Lieu des points de rencontre de ces parallèles avec BC et B′C.

(Alfred Pouilliart, lycée de Clermont-Ferrand.)

214. — Δ_1, Δ_2, Δ_3 sont trois droites concourantes, P_1, P_2 deux points fixes. Une droite Δ, mobile autour de P_1 rencontre Δ_1, Δ_2 aux points M_1, M_2; les droites P_2M_1, P_2M_2 coupent Δ_3 en M'_1, M'_2. On demande l'enveloppe des droites $M_1M'_2$, $M_2M'_1$ et le lieu de leur point de rencontre.

(Ve F. Prime, à Bruxelles.)

215. — On considère toutes les coniques bitangentes à un cercle fixe, passant par un point fixe et d'excentricité donnée. Montrer :

1° Que le lieu de leurs centres est un limaçon de Pascal;

2° Que leurs axes (ne passant pas par le centre du cercle) enveloppent un cercle;

3° Que le lieu de leurs foyers se compose d'un ovale de Descartes et d'un cercle concentrique au cercle donné.

(A. Duhameaux, lycée d'Amiens.)

216. — La tangente en un point M d'une ellipse rencontre les tangentes aux sommets du grand axe en deux points C, D que l'on joint aux foyers. Le point M se déplaçant sur l'ellipse, on demande le lieu des points G, H en lesquels les quatre droites obtenues se coupent;

2° Trouver l'enveloppe des polaires de G et de H par rapport à l'ellipse;

3° Chercher l'enveloppe de GH au moyen des coordonnées des points G, H.

(A. Hugron, lycée de Nantes.)

217. — Trouver le lieu du second foyer d'une hyperbole équilatère dont on donne un point et un foyer.

(Alfred Barriol.)

218. — On donne un triangle ABC; on joint le sommet A à un point N pris sur le côté opposé. Soit M le milieu de AN. On mène les droites BM et CM, qui rencontrent respectivement AC et AB en P et Q. On demande l'enveloppe de la droite PQ lorsque le point N décrit la droite BC.

(J. Hais, à Pierres.)

219. — On donne l'ellipse (E) ayant pour axes $2a$, $2b$. On mène la tangente en un point M de cette ellipse et l'on détermine le point P où elle rencontre le rayon de l'ellipse qui est perpendiculaire à OM, O étant le centre de l'ellipse. On mène ensuite à l'ellipse une tangente dont la direction est conjuguée de OM par rapport aux axes. Cette tangente rencontre la précédente en un point Q et le rayon OM en un point R. Trouver les lieux des points P, Q, R quand M parcourt l'ellipse (E).

(J. Hais.)

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

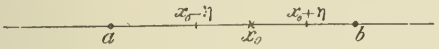
Paris — Imprimerie Chaix. — 23286-10-92.

3e Année. N° 3. Décembre 1892.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

NOTE SUR LA CONTINUITÉ

Continuité pour une valeur donnée de x. — On dit qu'une fonction, $f(x)$, bien définie dans un intervalle (a, b), est *continue* pour une valeur x_0 de x appartenant à cet intervalle, lorsque, pour tout nombre positif ε, il existe un autre nombre positif η, tel que l'inégalité



$$| f(x_0 + h) - f(x_0) | < \varepsilon$$

ait lieu pour toutes les valeurs de h qui vérifient l'inégalité

$$| h | < \eta.$$

En d'autres termes, l'accroissement de la fonction doit tendre vers 0, quand l'accroissement de la variable tend vers 0 d'une façon quelconque; on peut dire aussi que l'accroissement de la fonction doit être un infiniment petit en même temps que celui de la variable.

Dans la pratique, lorsqu'on cherche à résoudre l'inégalité

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

ou mieux lorsqu'on cherche le nombre positif η au dessous duquel $|h|$ doit être pris pour entraîner cette inégalité, on ne cherche pas le plus grand des nombres η au-dessous duquel l'inégalité imposée a lieu, mais bien un quelconque des nombres positifs inférieurs à celui-là, et l'on profite de cette indétermination pour imposer, dans chaque cas, à $|h|$ une limite supérieure qui permette de simplifier considérablement la question. En particulier, le nombre η doit être choisi assez petit pour que l'intervalle $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ ne sorte pas de l'intervalle (a, b), où la fonction est définie. Ceci ne peut être réalisé pour aucune des valeurs $x = a$ et $x = b$, puisqu'en ces points h ne peut prendre que des valeurs positives ou des valeurs négatives; mais si, pour $x = a$, il existe un nombre positif η, tel que les valeurs positives de h inférieures à η rendent $|f(x_0 + h) - f(x_0)|$ inférieure à un nombre positif ε, arbitrairement choisi, on dit que la fonction $f(x)$ est *continue à droite* pour $x = a$; de même, si, pour $x = b$, il existe un nombre positif η tel que les valeurs négatives de h plus petites que η, en valeur absolue, rendent $| f(x_0 + h) - f(x_0) |$ inférieure à un nombre positif ε, arbitrairement choisi, on dit que la fonction $f(x)$ est *continue à gauche* pour $x = b$.

Exemple. — La fonction $f(x) = +\sqrt{x(1 - x)}$ n'est définie que dans l'intervalle $(0, 1)$.

Elle est continue pour toute valeur de x, autre que 0 et 1, et appartenant à cet intervalle. En effet, pour toutes ces valeurs, $x(1 - x)$ est continue, non nulle et positive; soit donc x_0 l'une de ces valeurs de x, et a le nombre $x_0(1 - x_0)$; si l'on donne à x l'accroissement h, la fonction $x(1 - x)$ deviendra $a + k$, k désignant l'accroissement de cette fonction; on aura donc

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \sqrt{a + k} - \sqrt{a},$$

ou

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{k}{\sqrt{a + k} + \sqrt{a}}.$$

Puisque la fonction $x(1 - x)$ est continue, et que le nombre positif a n'est pas nul, il existe un

nombre positif η_1, tel que $|h| < \eta_1$ entraîne $|k| < \frac{a}{2}$ (on pourrait prendre, pour faire le raisonnement, toute autre fraction du nombre positif a); alors, pour ces valeurs de h, $|a + k|$ est sûrement plus grand que $\frac{a}{2}$, et l'on a

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \frac{|k|}{\sqrt{\frac{a}{2}} + \sqrt{a}} = \frac{|k|}{\sqrt{\frac{a}{2}}(1 + \sqrt{2})} = \frac{|k|}{A},$$

en désignant par A le nombre positif $\sqrt{\frac{a}{2}}(1 + \sqrt{2})$. Or, pour rendre $|f(x_0 + h) - f(x_0)|$ plus petit qu'un nombre positif quelconque, ε, il suffit de prendre $\frac{|k|}{A}$ plus petit que ε, ou $|k| < A\varepsilon$, et ceci a lieu dès que $|h|$ est moindre qu'un certain nombre positif η_2, puisque la fonction $x(1-x)$ est continue.

Il suffit maintenant de prendre pour η le plus petit des nombres η_1, η_2, $x_0 - 0$, $1 - x_0$, pour être assuré que $|f(x_0 + h) - f(x_0)|$ est définie et moindre que ε, pour toutes les valeurs de h qui vérifient l'inégalité $|h| < \eta$. Donc la fonction $f(x) = \sqrt{x(1 - x)}$ est continue pour $x = x_0$.

Elle est continue à droite pour $x = 0$; car si l'on donne à x un accroissement h, positif et inférieur à 1, l'accroissement de $f(x)$ est

$$f(h) - f(0) = \sqrt{h(1 - h)},$$

et, pour rendre cet accroissement plus petit qu'un nombre positif et quelconque, ε, il suffit de rendre $h(1 - h) < \varepsilon^2$, ou $h < \varepsilon^2$.

On verrait de même que la fonction est continue à gauche pour $x = 1$.

Continuité dans un intervalle. — Première définition. — On dit qu'une fonction, $f(x)$, bien définie dans un intervalle (a, b), est *continue dans cet intervalle*, lorsqu'elle est continue pour toute valeur de x comprise entre a et b, et continue à droite pour $x = a$, à gauche pour $x = b$.

Exemples. — La fonction $\sqrt{x(1 - x)}$ est continue dans l'intervalle $(0, 1)$. Les fonctions $ax^2 + 2bx + c$, a^x, $\sin x$, etc., sont continues dans tout intervalle. Les fonctions $\frac{1}{x - 1}$, $\log_a x$, ne sont pas continues dans l'intervalle $(0, 1)$; mais la première est continue dans tout intervalle tel que $(0, 1 - \varepsilon)$, et la seconde, dans tout intervalle tel que $(\varepsilon, 1)$, si petit que soit choisi le nombre positif ε.

Deuxième définition. — On dit qu'une fonction, $f(x)$, bien définie dans un intervalle (a, b), est *continue dans cet intervalle*, si l'on peut faire correspondre à tout nombre positif ε un autre nombre positif, η, tel que, pour tous les couples de valeurs de x et x' appartenant à l'intervalle (a, b) et vérifiant l'inégalité

$$|x - x'| < \eta,$$

on ait

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

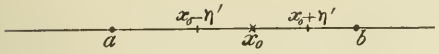
La limite supérieure de $|f(x) - f(x')|$ dans un intervalle déterminé (α, β) se nomme l'*oscillation* de la fonction dans cet intervalle.

Nous dirons donc que la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b) si l'on peut faire

correspondre à tout nombre positif ε un autre nombre positif η, tel que l'oscillation de la fonction soit moindre que ε, dans tout intervalle moindre en étendue que η et contenu dans (a, b).

Nous allons d'abord montrer que la deuxième définition entraîne la première.

Pour cela, considérons une fonction $f(x)$ satisfaisant à la seconde définition dans l'intervalle (a, b), et soit x_0 une valeur comprise entre a et $b (a < x_0 < b)$.



Si nous appelons η' le plus petit des trois nombres η, $x_0 - a$, $b - x_0$, nous aurons sûrement, pour toutes les valeurs de x vérifiant l'inégalité $| x - x_0 | < \eta'$, la nouvelle inégalité

$$| f(x) - f(x_0) | < \varepsilon ;$$

or, dans ces inégalités, ε est un nombre positif quelconque, et si l'on pose $x = x_0 + h$, l'inégalité $| h | < \eta'$ entraîne

$$| f(x_0 + h) - f(x_0) | < \varepsilon.$$

Si nous considérons maintenant la valeur $x = a$, nous aurons par définition

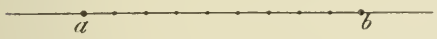
$$| f(a + h) - f(a) | < \varepsilon,$$

pour toutes les valeurs positives de h inférieures à η.

La fonction est donc continue pour toute valeur de x comprise entre a et b, et continue à droite pour $x = a$. Nous verrions de même qu'elle est continue à gauche pour $x = b$. Elle satisfait donc entièrement à la première définition.

Il nous reste à montrer que la première définition entraîne la seconde.

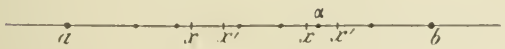
Pour cela, nous allons d'abord transformer la seconde définition. A cet effet, admettons que $f(x)$ désigne une fonction continue au second sens du mot, c'est-à-dire telle qu'on puisse faire correspondre à tout nombre positif, ε, un autre nombre positif, η, tel que pour toutes les valeurs de x et de x' appartenant à l'intervalle donné (a, b) et vérifiant l'inégalité $| x - x' | < \eta$, on ait $| f(x) - f(x') | < \varepsilon$;



alors si nous appelons η' un nombre positif quelconque, inférieur à η, et si nous considérons les intervalles $(a, a + \eta')$, $(a + \eta', a + 2\eta')$, ... $[a + (n - 1)\eta', b]$, nous aurons partagé l'intervalle (a, b) en n intervalles égaux ou inférieurs à η' (le dernier peut être inférieur à η'), dans chacun desquels l'oscillation de la fonction est moindre que ε. Nous pouvons d'ailleurs supposer ces intervalles tous égaux : il suffit de poser $\eta' = \dfrac{b - a}{n}$ et $b - a < n\eta$; nous pouvons les supposer aussi tous inégaux ; il suffit que l'étendue de chacun d'eux soit moindre que η.

Réciproquement, une fonction, $f(x)$, bien définie dans un intervalle (a, b), sera continue au second sens du mot dans cet intervalle si, pour tout nombre positif donné, ε, il existe une division de l'intervalle (a, b) en un nombre fini d'intervalles dans chacun desquels l'oscillation soit moindre que ε.

En effet, soit η l'étendue du plus petit de ces intervalles ; si l'on considère deux valeurs de l'intervalle (a, b), x et x', vérifiant l'inégalité $| x - x' | < \eta$,



ou bien ces deux valeurs appartiendront au même intervalle, et l'on aura $| f(x) - f(x') | < \varepsilon$, ou bien elles seront dans deux intervalles consécutifs, et alors, en appelant α la limite commune des deux intervalles, on aura

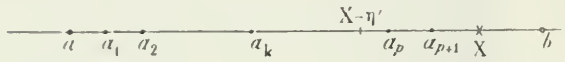
$$| f(x) - f(\alpha) | < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad | f(\alpha) - f(x') | < \varepsilon,$$

d'où

$$| f(x) - f(x') | < 2\varepsilon ;$$

or, ε étant un nombre positif quelconque, 2ε est aussi un nombre positif quelconque, et l'on voit que, pour tout l'intervalle (a, b), l'inégalité $| x - x' | < \eta$ entraîne l'inégalité $| f(x) - f(x') | < 2\varepsilon$. La fonction $f(x)$ est donc continue dans l'intervalle (a, b), au second sens du mot.

Cela posé, je dis que si une fonction $f(x)$, bien définie dans un intervalle (a, b), est continue pour toute valeur de x comprise entre a et b, et continue à droite pour $x = a$, à gauche pour $x = b$, elle est continue dans l'intervalle (a, b), au second sens du mot. En effet, si cela n'était pas, c'est qu'il y aurait au moins un nombre positif déterminé, ε, pour lequel la division de l'intervalle (a, b) en intervalles partiels, dans chacun desquels l'oscillation de la fonction soit moindre que ε, serait impossible. Considérons alors ce nombre ε; il y a des nombres positifs η, tels que, pour les valeurs positives de h, moindres que l'un d'eux, on ait $|f(a+h) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$; soit η_1 le plus grand de tous; alors de a à $a + \eta_1$ l'oscillation de la fonction est moindre que ε; appelons a_1 le nombre $a + \eta_1$. Il y a de même des nombres positifs η, tels que, pour les valeurs positives de h, moindres que l'un d'eux, on ait $|f(a_1 + h) - f(a_1)| < \frac{\varepsilon}{2}$; soit η_2 le plus grand de tous (*); alors dans l'intervalle $(a_1, a_1 + \eta_2)$ l'oscillation de la fonction est moindre que ε. On formera de même des intervalles $(a_2, a_2 + \eta_3)$, ..., $(a_k, a_k + \eta_{k+1})$, ..., en posant toujours $a_k = a_{k-1} + \eta_k$, dans lesquels l'oscillation de la fonction est moindre que ε. Si en procédant ainsi on finissait par atteindre ou par dépasser le nombre b, la division de l'intervalle (a, b) en intervalles partiels, dans chacun desquels l'oscillation soit moindre que ε, serait possible, ce qui n'est pas admis pour le nombre ε. Donc la suite des nombres $a, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ est infinie et croissante et a pour limite un nombre X, inférieur ou égal à b. Mais, pour $x = X$, la fonction $f(x)$ est continue au moins à gauche; donc il y a des nombres positifs η', tels que pour les valeurs négatives de h vérifiant l'une des inégalités $-h < \eta'$, on ait



$$|f(X + h) - f(X)| < \frac{\varepsilon}{2};$$

soit η' l'un quelconque de ces nombres; alors dans l'intervalle $(X - \eta', X)$ l'oscillation de la fonction est moindre que ε. D'autre part, à partir d'un certain rang p, les nombres a_k tombent dans cet intervalle; si l'on prend deux nombres consécutifs de cette suite, a_p, a_{p+1}, situés dans ce nouvel intervalle, on ne peut pas agrandir l'intervalle (a_p, a_{p+1}) sans que l'oscillation de la fonction dépasse ε. La contradiction est manifeste. La fonction $f(x)$, continue dans l'intervalle (a, b) au premier sens du mot, est donc aussi continue au second sens.

Cette démonstration me paraît nouvelle. Il y a déjà plusieurs années que je la donne dans mon enseignement, et il m'a paru intéressant de la publier.

E. Humbert,
Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Louis-le-Grand.

(*) On peut objecter à ce raisonnement qu'il n'est pas sûr qu'il existe un nombre plus grand que tous les autres, parmi les η; mais alors ces nombres admettent une limite supérieure, c'est-à-dire qu'il y a un nombre positif η_2 supérieur à tous les nombres η et tel que tous les nombres moindres que lui soient des nombres η; pour tous ces nombres η on a, par exemple,

$$|f(a_1 + \eta) - f(a_1)| < \frac{\varepsilon}{2};$$

si donc η tend vers η_2 en croissant, la différence $|f(a_1 + \eta) - f(a_1)|$ a une limite au plus égale à ε; d'ailleurs cette limite est $|f(a_1 + \eta_2) - f(a_1)|$, car $f(a_1 + \eta)$ tend vers $f(a_1 + \eta_2)$, puisque la fonction $f(x)$ est continue pour $x = a_1 + \eta_2$. On a donc

$$|f(a_1 + \eta_2) - f(a_1)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

et le raisonnement se fera sans aucune modification en se servant des nouveaux nombres $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k, \ldots$, et en astreignant toutes les différences telles que $f(a_k + \eta) - f(a_k)$ à ne pas dépasser $\frac{\varepsilon}{2}$.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (Concours de 1892).

173. — *Un cercle* C *est représenté en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0.$$

1° On demande de former l'équation générale des coniques A *qui sont doublement tangentes au cercle* C *de telle façon que la corde qui joint les deux points de contact passe par l'origine des coordonnées, et qui sont en outre tangentes à la droite* D *ayant pour équation*

$$y = x\sqrt{3} + \sqrt{3}.$$

2° Par un point quelconque M *du plan, de coordonnées* α, β, *il passe en général deux coniques de cette espèce* A′, A″ *; où le point* M *doit-il se trouver pour que ces coniques soient réelles?*

3° Les deux coniques A′, A″ *qui passent au point* M *ont trois autres points communs* M_1, M_2, M_3, *dont on demande de calculer les coordonnées en fonction des coordonnées* α, β *du point* M.

4° Former l'équation de l'hyperbole équilatère H *qui passe par les quatre points* M_1, M_2, M_3, M, *et montrer que cette hyperbole passe par quatre points fixes quand le point* M *se déplace.*

5° Trouver le lieu des points d'intersection des deux coniques A′, A″ *et l'enveloppe de leurs sécantes communes, lorsque les cordes de contact de ces deux coniques avec le cercle* C *sont perpendiculaires. — Quelle est, dans ce même cas, l'espèce des coniques* A′, A″?

N.-B. — On prendra pour paramètre variable le coefficient angulaire m de la corde de contact de la conique A avec le cercle C.

1° L'équation générale des coniques considérées est de la forme

$$\lambda(x^2 + y^2 - 2x - 1) + (y - mx)^2 = 0.$$

Remplaçons y par $x\sqrt{3} + \sqrt{3}$ et écrivons que l'équation obtenue en x a une racine double; nous en déduisons

$$\lambda = -\frac{1}{2}(3 + m^2).$$

et par suite les coniques A ont pour équation

$$(x^2 + y^2 - 2x - 1)(3 + m^2) - 2(y - mx)^2 = 0.$$

Cette équation, ordonnée par rapport à m, prend la forme

$$(y^2 - x^2 - 2x - 1)m^2 + 4xym + 3x^2 + y^2 - 6x - 3 = 0. \qquad (1)$$

2° Si x et y sont les coordonnées d'un point M du plan, cette équation en m aura deux solutions réelles ou imaginaires conjuguées m', m''. Les coniques A′ et A″ correspondant à ces racines seront elles-mêmes réelles ou imaginaires conjuguées comme ces racines; par suite en égalant à zéro le discriminant du trinome du second degré en m, on aura l'équation de la séparatrice. On obtient ainsi l'équation

$$4x^2y^2 - (3x^2 + y^2 - 6x - 3)(y^2 - x^2 - 2x - 1) = 0,$$

qui peut prendre les formes successives

$$(x^2 + y^2 - 2x - 1)(3x^2 + y^2 - 6x - 3) - 2x^2(3x^2 + y^2 - 6x - 3) - 4x^2y^2 = 0,$$

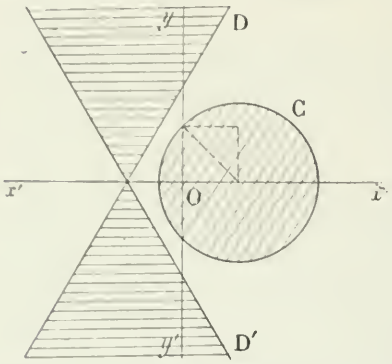
$$(x^2 + y^2 - 2x - 1)(3x^2 - y^2 + 6x + 3) = 0,$$

ou enfin

$$(x^2 + y^2 - 2x - 1)(x\sqrt{3} + \sqrt{3} - y)(x\sqrt{3} + \sqrt{3} + y) = 0.$$

La séparatrice est donc constituée par le cercle C, la droite D et sa symétrique D′ par rapport à l'axe des x. Résultat évident *a priori* puisque la séparatrice n'est pas autre chose que l'enveloppe des coniques A qui touchent le cercle C, la droite D et aussi la droite D′ dont l'équation s'obtient en changeant le signe de $\sqrt{3}$.

D'ailleurs, d'une manière générale, les coniques A bitangentes à une conique donnée C, la corde des contacts passant par un point fixe O, et tangentes à une droite D touchent aussi la droite D′ conjuguée de D par rapport à l'angle $\beta\alpha O$, α désignant le point commun à la droite D et à la polaire $\alpha\beta$ du point O relative à C, car $\alpha\beta$ est aussi la polaire de O pour toutes les coniques A, et par suite les droites $\alpha\beta$ et αO sont conjuguées par rapport à ces coniques.



Dans le cas particulier de la question proposée, le point M devra se trouver dans l'angle des droites D, D′ renfermant l'axe des x et extérieurement au cercle C, pour que les coniques A′ et A″ soient réelles.

3° Soient x, y les coordonnées d'un des points M_1, M_2, M_3. Les équations en m correspondant à ces points admettant les mêmes racines que celle qui correspond au point $M(\alpha, \beta)$, on a

$$\frac{\beta^2 - \alpha^2 - 2\alpha - 1}{y^2 - x^2 - 2x - 1} = \frac{\alpha\beta}{xy} = \frac{3\alpha^2 + \beta^2 - 6\alpha - 3}{3x^2 + y^2 - 6x - 3}, \tag{2}$$

relations d'où l'on déduit les suivantes :

$$\frac{\alpha\beta}{xy} = \frac{3\alpha^2 - \beta^2}{3x^2 - y^2}, \qquad \frac{\alpha\beta}{xy} = \frac{2\alpha^2 - 2\alpha - 1}{2x^2 - 2x - 1}.$$

Ces deux équations représentent deux coniques circonscrites au quadrilatère $MM_1M_2M_3$. La première est formée de deux droites passant par l'origine, l'une étant évidemment OM et l'autre ayant pour équation

$$3\alpha x + \beta y = 0.$$

Si M_1 désigne le point situé sur OM, les abscisses des points M_2, M_3 sont les racines de l'équation obtenue en éliminant y entre les équations

$$3\alpha x + \beta y = 0,$$

$$2\alpha\beta x^2 - (2\alpha^2 - 2\alpha - 1)xy - 2\alpha\beta x - \alpha\beta = 0;$$

on obtient ainsi

$$(6\alpha^2 + 2\beta^2 - 6\alpha - 3)x^2 - 2\beta^2 x - \beta^2 = 0.$$

Les racines de cette équation vérifient la relation

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = -2;$$

il en résulte évidemment que l'on a aussi

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{x_1} = -2.$$

puisque l'on peut supposer donné le point M_2, par exemple, au lieu du point M.

Ces relations sont d'ailleurs évidentes géométriquement, si l'on remarque que toutes les coniques A qui passent par un point M, passent aussi par le conjugué de ce point relativement au point O et au point où OM coupe la polaire fixe de O relative aux coniques A.

4° La première des équations (2) montre que le quadrilatère $MM_1M_2M_3$ est inscrit à l'hyperbole équilatère

$$\alpha\beta(y^2 - x^2 - 2x - 1) = xy(\beta^2 - \alpha^2 - 2\alpha - 1)$$

qui passe par les points communs aux axes et à l'hyperbole équilatère

$$y^2 - x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Cette dernière coupe l'axe des y aux points $(0, 1)$ et $(0, -1)$ et l'axe des x en deux points confondus $(-1, 0)$.

5° On obtiendra l'équation du lieu demandé en écrivant que -1 est le produit des racines de l'équation (1) en m. On obtient ainsi

$$x^2 + y^2 - 4x - 2 = 0,$$

équation d'un cercle C'.

Quant à l'enveloppe demandée, c'est, outre l'origine, l'enveloppe des cordes de ce cercle interceptées par les deux cordes communes passant par l'origine et dont l'équation quadratique est de la forme

$$y^2 + \lambda xy - 3x^2 = 0. \qquad (3)$$

Ces sécantes communes sont donc deux rayons conjugués de l'involution déterminée par les axes de coordonnées et les parallèles aux droites D, D' menées par l'origine; l'enveloppe des cordes qu'elles interceptent sur le cercle C' est donc une conique dont on connaît huit tangentes et dont l'équation tangentielle est d'ailleurs facile à obtenir; en effet, si l'on forme l'équation du faisceau des droites joignant l'origine aux points d'intersection du cercle C' avec la droite

$$ux + vy - 1 = 0,$$

on obtient

$$x^2 + y^2 - 4x(ux + vy) - 2(ux + vy)^2 = 0;$$

écrivons que ce faisceau est identique au faisceau représentépar l'équation (3). Il suffit, pour éliminer λ, d'exprimer que les coefficients de x^2 et de y^2 sont proportionnels à -3 et $+1$, ce qui donne immédiatement

$$1 - 4u - 2u^2 + 3(1 - 2v^2) = 0,$$

ou en simplifiant

$$u^2 + 3v^2 + 2u - 2 = 0.$$

C'est l'équation tangentielle de l'ellipse ayant pour équation cartésienne

$$2x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0.$$

Le centre a pour coordonnées $\qquad y = 0, \qquad x = \frac{1}{2}.$

L'équation réduite est donc

$$2x^2 + y^2 - \frac{3}{2} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{x^2}{\left(\frac{3}{4}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)} = 1.$$

La nature des coniques A dépend du signe de l'expression

$$(m^2 - 1)(m^2 + 3).$$

On voit que dans le cas considéré les coniques A' et A'' sont toujours de natures différentes, car si l'on suppose $m'' = -\frac{1}{m'}$ on a

$$(m''^2 - 1)(m''^2 + 3) = (1 - m'^2)(1 + 3m'^2)\frac{1}{m'^4}.$$

Il y a exception si l'on suppose $m' = +1$, $m'' = -1$; dans ce cas A' et A'' sont deux paraboles.

E. Duporcq (école Monge).

Solutions exactes : MM. J. Bais (à Pierres); C. Rau (lycée Condorcet); Vazou (professeur au collège de Falaise).

ALGÈBRE

153. — *Trouver la limite de l'expression*

$$y_m = \left[\left(1 + \frac{a-1}{m}\right)\left(1 + 2\frac{a-1}{m}\right) \dots \left(1 + m\frac{a-1}{m}\right)\right]^{\frac{a-1}{m}}$$

quand l'entier positif m *croît indéfiniment,* a *désignant un nombre positif. Cas particulier,* a = e.

Le logarithme népérien de y_m est donné par la formule

$$Ly_m = \frac{a-1}{m}\left[L\left(1 + \frac{a-1}{m}\right) + L\left(1 + 2\frac{a-1}{m}\right) + \dots + L\left(1 + m\frac{a-1}{m}\right)\right].$$

Si nous considérons la fonction $z = Lx$,

nous voyons que Ly_m s'obtient en partageant l'intervalle de 1 à a en m parties égales et en faisant la somme des produits des valeurs que prend la fonction z à la fin de chacun des intervalles par la longueur commune de ces intervalles.

La limite de Ly_m est donc l'intégrale définie

$$\int_1^a Lx.dx,$$

de sorte que $\lim Ly_m = (xLx - x)_1^a = aLa - a + 1$;

donc en appelant y la limite de y_m, on a

$$y = e^{aLa - a + 1} = \left(\frac{a}{e}\right)^a.e.$$

En particulier si $a = e$, on a $y = e$.

(A. de Boisfleury, collège Stanislas.)

Solutions analogues : MM. Giuseppe Santacroce (École industrielle de Foggia (Italie)); R. Gilbert (lycée Janson-de-Sailly.)

M. Audibert (Marseille) a envoyé une solution s'appuyant sur le développement en série de $L(1 + x)$. — La démonstration ne nous semble pas très rigoureuse. M. V. Jamet emploie d'abord une méthode analogue, mais démontre rigoureusement la proposition en supposant a compris entre 0 et 2. M. Audibert indique aussi cette condition comme nécessaire pour la validité de sa démonstration; mais M. V. Jamet fait voir ensuite que le théorème une fois admis pour $a < 2$, est vrai quelle que soit la valeur positive attribuée à a.

Enfin nous avons reçu encore une autre solution, mais celle-ci est entièrement inexacte.

GÉOMÉTRIE ET GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

156. — *Par un point* A *pris sur un paraboloïde hyperbolique, on mène une perpendiculaire à chacune des génératrices d'un même système; prouver que le lieu de ces perpendiculaires est un cône du second degré. Trouver les plans cycliques de ce cône. Lieu des pieds des perpendiculaires.*

Soit M le pied de la perpendiculaire abaissée du point A sur une génératrice G, parallèle au plan directeur P. Appelons AH la perpendiculaire abaissée de A sur le plan P et AK la génératrice de l'autre système passant par le point A.

La droite AM est à l'intersection du plan AMG qui contient la droite AK et du plan mené par A perpendiculaire à G qui contient la droite AH. Or ces deux plans sont perpendiculaires puisque la droite G du premier est perpendiculaire au second, et comme ces plans tournent autour des deux droites fixes AK et AH, ils engendrent des faisceaux homographiques en involution et le lieu de leur intersection est un cône du deuxième degré passant par les droites AH et AK.

L'intersection de ce cône et du paraboloïde se compose de la droite AK et d'une cubique gauche qui constitue le lieu du point M. La projection de cette courbe sur le plan P est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de la projection de A sur les projections des droites G, car l'angle droit AMG ayant un côté parallèle au plan P se projette sur ce plan suivant un angle droit. Or les projections des droites G enveloppent une parabole, contour apparent de la surface, donc la projection du lieu du point M est une podaire de parabole.

Coupons le cône par le plan passant par G et parallèle au plan P. Soient K et H les points où il rencontre AK et AH. L'angle HMK est droit, en vertu du théorème des trois perpendiculaires. Donc le plan considéré coupe le cône suivant un cercle de diamètre HK. Tout plan perpendiculaire à AH est donc un plan cyclique, il en est de même des plans perpendiculaires à AK.

AUDIBERT, lycée de Marseille.

Autres solutions par MM. A. CAHEN, étudiant à la Sorbonne et D. COT (lycée de Poitiers).

---

220. — *Au cercle* O, *inscrit à un triangle équilatéral* ABC, *on mène une tangente, qui coupe les côtés du triangle aux points* α, β, γ, *de chacun desquels on mène la seconde tangente respectivement aux cercles exinscrits* O_a, O_b, O_c. *Lieu des sommets du triangle formé par ces droites quand la tangente* $\alpha\beta\gamma$ *varie.*

On sait que lorsque trois cercles ont un point commun, il existe une infinité de triangles dont les côtés passent par les trois autres points où ces cercles se coupent deux à deux, et dont les sommets décrivent ces cercles. En transformant homographiquement cette propriété, on voit que lorsque trois coniques sont circonscrites à un même triangle, il y a une infinité de triangles dont les côtés passent par les trois autres points de rencontre de ces coniques et dont les sommets décrivent ces courbes. De là, résulte enfin, par dualité, que lorsque trois coniques sont inscrites à un même triangle, il y a une infinité de triangles dont les côtés enveloppent chacun une de ces courbes, leurs sommets décrivant les trois autres tangentes communes qu'elles admettent deux à deux.

Cela posé, considérons les trois cercles O, O_b et O_c, inscrits au triangle ABC. Les trois autres tangentes communes qu'ils admettent deux à deux, sont AC pour O et O_b, AB pour O et O_c, enfin la symétrique de BC par rapport à A, pour O_b et O_c. Cette dernière droite est donc le lieu du troisième sommet du triangle formé avec $\beta\gamma$ par les tangentes menées des points β et γ aux cercles O_b et O_c.

Le lieu cherché se compose donc des droites symétriques des côtés du triangle ABC, relativement aux sommets opposés.

SOLUTION ANALYTIQUE

Prenons ABC pour triangle de référence. La droite $\alpha\beta\gamma$ aura une équation de la forme

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

avec la condition

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0. \qquad (1)$$

La droite menée de β tangentiellement à O_b sera représentée par l'équation

$$\alpha x + \mu y + \gamma z = 0, \qquad (2)$$

μ étant défini par la relation
$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}=\frac{3}{\mu}, \tag{3}$$
car l'équation tangentielle de O_b est, comme on le voit aisément,
$$\frac{1}{u}+\frac{1}{w}=\frac{3}{v}.$$

En tenant compte des relations (1) et (3), l'équation (2) peut s'écrire
$$\alpha x-3\beta y+\gamma z=0.$$

De même, la tangente menée de γ à O_c a pour équation
$$\alpha x+\beta y-3\gamma z=0.$$

En éliminant α, β et γ entre l'équation (1) et ces deux dernières, on trouve
$$x+2y+2z=0,$$
équation d'où l'on déduit le résultat trouvé précédemment.

Ernest Duporcq (école Monge).

---

169. — *On considère toutes les coniques circonscrites à un quadrilatère* ABCD *et une droite fixe* Δ *rencontrant ces coniques en deux points variables* P, Q. *On prend sur chaque conique le conjugué harmonique* M *du point* D *par rapport à* P *et* Q. *Trouver le lieu de* M.

Prenons le triangle ABC comme triangle de référence; soient
$$uX+vY+wZ=0 \tag{1}$$
l'équation de la droite Δ, et x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point D.

L'équation d'une conique circonscrite au quadrilatère sera
$$\frac{l}{X}+\frac{m}{Y}+\frac{n}{Z}=0 \tag{2}$$
avec la condition
$$\frac{l}{x_0}+\frac{m}{y_0}+\frac{n}{z_0}=0. \tag{3}$$

Soit M un point du lieu (x, y, z); on aura
$$\frac{l}{x}+\frac{m}{y}+\frac{n}{z}=0. \tag{4}$$
et comme les points D et M sont conjugués harmoniques par rapport à P et Q, nous écrirons que les quatre droites AD, AM, AP et AQ forment un faisceau harmonique.

Les équations de AD et AM sont respectivement
$$\frac{Y}{Z}=\frac{y_0}{z_0}, \qquad \frac{Y}{Z}=\frac{y}{z}.$$

Les équations de AP et de AQ s'obtiennent en éliminant X entre (1) et (2). On obtient
$$-\frac{lu}{vY+wZ}+\frac{m}{Y}+\frac{n}{Z}=0$$
ou
$$nvY^2+(mv+nw-lu)YZ+mwZ^2=0.$$
et ces droites formeront un faisceau harmonique si l'on a
$$2\left(\frac{y_0y}{z_0z}+\frac{mw}{nv}\right)+\left(\frac{y_0}{z_0}+\frac{y}{z}\right)\frac{mv+nw-lu}{nv}=0. \tag{5}$$

On aura l'équation du lieu en éliminant l, m, n entre (3), (4) et (5).

Des deux premières on tire

$$\frac{l}{(yz_0 - zy_0)xx_0} = \frac{m}{(zx_0 - xz_0)yy_0} = \frac{n}{(xy_0 - yx_0)zz_0};$$

en transportant dans (5) et ordonnant par rapport à u, v, w, on aperçoit le facteur $yz_0 - zy_0$, qui correspond au cas où la conique se réduit aux droites AD et BC, et il reste, après avoir supprimé ce facteur, l'équation

$$uxx_0(yz_0 + zy_0) + vyy_0(zx_0 + xz_0) + wzz_0(xy_0 + yx_0) = 0,$$

qui représente une conique circonscrite au triangle ABC.

Elle passe aussi par les points doubles de l'involution déterminée par les coniques sur la droite Δ, elle se trouve ainsi définie par cinq points.

S. Lattès, lycée de Marseille.

Solution géométrique. — Il est aisé de voir que le point M est le second point d'intersection de la conique et de la droite qui joint le point D au pôle P de la droite Δ.

Projetons la figure de façon que la droite Δ devienne la droite de l'infini, le point P devient le centre de la conique, et le point M est le point diamétralement opposé au point D. Or le lieu des centres des coniques passant par quatre points est une conique dite *conique des neuf points*, et aisée à construire; donc le lieu du point M, homothétique du lieu des centres, sera une conique dont on aura sans peine neuf points, parmi lesquels se trouvent les points A, B et C.

Ce lieu rencontre la droite de l'infini aux mêmes points que la conique des neuf points, c'est-à-dire aux points de contact des deux paraboles du faisceau, ou, en d'autres termes, aux points doubles de l'involution déterminée par les coniques sur la droite de l'infini.

Toutes ces propriétés sont d'ailleurs projectives et s'interprètent aisément quand on revient à la première figure.

---

171. — *Etant données une sphère et une quadrique, les normales abaissées du centre de la sphère sur toutes les quadriques qui passent par l'intersection de ces deux surfaces sont sur un cône du second ordre.*

Prenons pour axes trois droites rectangulaires passant par le centre de la sphère, et soient

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$

$$f(x, y, z) = 0$$

les équations de la sphère et de la quadrique.

Une quadrique quelconque passant par l'intersection de ces deux surfaces aura pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 + \lambda f(x, y, z) = 0. \qquad (1)$$

En écrivant que la normale en un point (x, y, z) à cette quadrique passe par le centre O de la sphère, on aura les équations

$$\frac{x}{2x + \lambda f'_x} = \frac{y}{2y + \lambda f'_y} = \frac{z}{2z + \lambda f'_z}$$

ou

$$\frac{x}{f'_x} = \frac{y}{f'_y} = \frac{z}{f'_z}. \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) déterminent les coordonnées des pieds des normales menées à la quadrique (1) par le point O; comme les équations (2) ne renferment pas le paramètre λ, on en conclut que ces équations représentent une courbe qui est le lieu des pieds de ces normales.

Les normales seront situées sur le cône ayant pour sommet le point O et pour directrice la courbe (2). On aura l'équation de ce cône en rendant les équations (2) homogènes et en éliminant la variable d'homogénéité.

Posons $$f(x, y, z) \equiv \varphi(x, y, z) + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D,$$

$\varphi(x, y, z)$ désignant l'ensemble des termes du second degré.

Les équations (2), rendues homogènes, peuvent s'écrire

$$\frac{\varphi'_x + 2Ct}{x} = \frac{\varphi'_y + 2C't}{y} = \frac{\varphi'_z + 2C''t}{z}$$

ou encore, en introduisant un nouveau paramètre u,

$$\varphi'_x + 2Ct - ux = 0,$$
$$\varphi'_y + 2C't - uy = 0,$$
$$\varphi'_z + 2C''t - uz = 0.$$

En éliminant t et u on obtient

$$\begin{vmatrix} \varphi'_x & C & x \\ \varphi'_y & C' & y \\ \varphi'_z & C'' & z \end{vmatrix} = 0$$

ou $$C(z\varphi_y - y\varphi_z) + C'(x\varphi'_z - z\varphi'_x) + C''(y\varphi_x - x\varphi'_y) = 0,$$

qui est l'équation d'un cône du deuxième degré.

Remarque. — Il est aisé de voir que les équations (2) représentent une cubique gauche qui passe par le point O.

Les points de la courbe sont les points communs aux trois quadriques

$$yf'_z - zf'_y = 0,$$
$$zf'_x - xf'_z = 0,$$
$$xf'_y - yf'_x = 0.$$

Les deux premières contiennent la droite

$$z = 0, \qquad f'_z = 0,$$

qui n'appartient pas en général à la troisième quadrique; elles se coupent en outre suivant une cubique gauche qui se trouve sur la troisième quadrique.

Et comme cette cubique passe par le point O, puisque les trois quadriques y passent, on voit que le cône qui a pour sommet le point O et qui s'appuie sur cette cubique est du deuxième degré.

L. Maury, répétiteur au lycée d'Alais.

Autres solutions par MM. Arzeram; Armand Cahen, étudiant à la Sorbonne; A. Duhameaux, lycée d'Amiens; E. Guédon, lycée Saint-Louis; J. Hais, à Pierres.

CONCOURS DE 1892 *(suite)*.

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

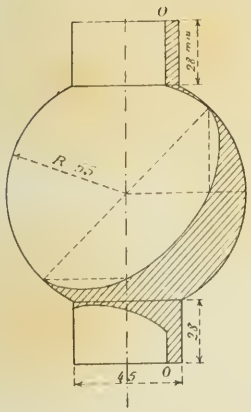
Cours préparatoires.

Algèbre.

221. — On demande à quel taux d'intérêt on doit emprunter une somme A que l'on veut rembourser au moyen de deux payements égaux à a qui doivent être effectués, le premier au bout de deux, le second, au bout de quatre années : discuter la solution.

Géométrie analytique.

222. — Lieu des centres des coniques semblables entre elles qui passent par trois points donnés : cas particulier des hyperboles équilatères.



Lavis (feuille 1/8 grand aigle).

SPHÈRE ET CYLINDRE.

Faire le lavis d'une sphère dépolie traversée par un cylindre de révolution dont l'axe vertical passe par son centre.

Pour les dimensions, se reporter au croquis ci joint.

Épure (feuille 1/4 grand aigle).

223. — Une sphère de 65^{mm} de rayon a son centre situé à 100^{mm} de chacun des plans de projection.

Un cylindre de révolution, de 50^{mm} de rayon, a pour axe une droite dont la projection horizontale passe par la projection horizontale du centre de la sphère; de plus, le cylindre est tangent intérieurement à la sphère en un point situé plus haut que le centre de cette dernière; enfin cet axe fait avec le plan horizontal un angle de 45° et avec le plan vertical un angle de 30°, ce qui achève de déterminer sa position.

On demande :

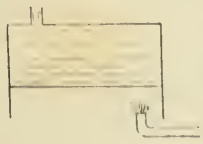
1° De chercher l'intersection des deux surfaces;

2° De représenter le cylindre seul entaillé par la sphère; ce cylindre sera limité par deux plans horizontaux choisis à volonté.

Places d'élèves externes.

Analyse et Trigonométrie.

224. — Un bassin rectangulaire, dont la base a une surface S, est alimenté par un robinet qui y déverse un volume d'eau égal à Q pendant l'unité de temps. Un orifice d'écoulement ayant une section s est percé dans le fond de ce bassin. On demande comment variera la hauteur h de l'eau dans le bassin à partir d'une valeur initiale h_0, et en particulier pour quelle valeur de h le niveau restera stationnaire. La vitesse d'écoulement du liquide par l'orifice sera supposée égale à $\sqrt{2gh}$, g étant l'accélération due à la pesanteur.



225. — On donne dans un triangle ABC : la hauteur AH = 1865^m, la hauteur BK = 2943^m, l'angle C = 55°40′27″.

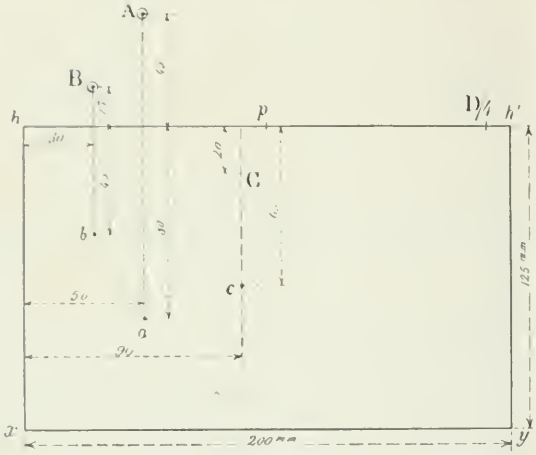
On demande de calculer les angles A et B, les côtés a, b, c, et la surface.

Mécanique.

226. — Un point mobile b s'élève verticalement en B avec une vitesse initiale nulle et une accélération constante γ. D'un autre point A situé dans le même plan horizontal que B on lance un projectile assimilable à un point matériel pesant avec une vitesse initiale donnée v_0. On demande quelle direction on doit donner à cette vitesse initiale pour que le projectile atteigne le point b.

Épure de Perspective (feuille 1/4 grand aigle).

Un tableau perspectif est établi sur les données indiquées au croquis ci-joint.



xy est la base du tableau; sa largeur est de 200^{mm}.

hh' est la ligne d'horizon située à 125^{mm} au-dessus de xy.

p est le point poincipal de fuite, situé au milieu de hh'.

D/4 est le point quart de distance, situé à 90^{mm} du point p.

Cela posé :

On donne trois points Aa, Bb, Cc. A, B, C sont les perspectives des points dans l'espace; a, b, c sont les perspectives de leurs projections sur le géométral qui a xy pour ligne de terre.

On demande :

1° De tracer, en perspective, le cercle qui passe par les trois points A, B et C;

2° De figurer le cône de révolution qui, ayant pour base le cercle ci-dessus, aurait une hauteur égale à deux fois le diamètre de ce cercle;

3° De déterminer l'ombre propre du cône et son ombre portée sur le géométral; les rayons lumineux seront de front; leur direction est laissée au choix du candidat.

Croquis et Lavis.

Première partie : Croquis (feuille 1/8 grand aigle, quadrillée).

1° Sur une première feuille, faire au crayon, à main levée, le relevé géométral (plan, élévation et coupe) de l'un des objets placés dans la salle d'examen;

2° Relever ses dimensions (en millimètres) et les inscrire sur le croquis.

(On accorde 1 h. 1/2 pour cette première partie du travail, après quoi le modèle en relief est retiré de la salle.)

Deuxième partie : Mise au net et Lavis (feuille 1/4 grand aigle).

1° Sur une seconde feuille, mettre au net, à l'encre de Chine, à une échelle déterminée, le croquis précédent.

2° Laver à l'encre de Chine une seule des projections (plan, élévation ou coupe).

Nota. — L'échelle est laissée à l'arbitraire de MM. les candidats; elle doit être choisie assez grande pour que la feuille soit bien remplie. L'échelle doit être dessinée dans une partie libre de cette feuille.

BOURSES DE LICENCE

Sciences physiques.

I. — **227.** Une surface cylindrique pesante, ayant une épaisseur très petite, est formée d'une substance homogène; sa section droite est un cercle de rayon R. Ce cylindre creux est suspendu horizontalement par deux fils de même longueur L, fixés chacun à une extrémité de sa génératrice supérieure. Ces fils, parfaitement flexibles et de poids négligeable, sont verticaux dans la position d'équilibre.

On écarte le système de sa position d'équilibre en maintenant les fils dans un même plan et normaux à la surface, puis on l'abandonne.

Calculer en fonction de R et de L la durée des oscillations de ce pendule dans le cas de très petites amplitudes.

Application : $L = 1^m$, $R = 0^m,1$, $g = 981$ C.G.S.

II. — Composés oxygénés de l'arsenic.

III. — **228.** La combustion de 1^{gr} d'un carbure d'hydrogène solide dans un calorimètre clos en présence d'un excès d'oxygène, a dégagé $9^{cal},688$. Les produits de la combustion sont : CO^2, $3^{gr},4375$; HO, $0^{gr},5625$. Sachant que la densité de vapeur du carbure est 4.432 ; que la chaleur de combustion de 12^{gr} de charbon diamant est $94^{cal},3$ et que la chaleur de formation de 18^{gr} d'eau liquide est 69^{cal} ; on demande : 1° la composition centésimale du carbure ; 2° sa formule ; 3° la chaleur de combustion d'une molécule ; 4° la chaleur de formation à partir des éléments.

Mathématiques.

229. — En désignant par a, b, x', y' des constantes, on demande de déterminer λ de façon que

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) - (x - x')^2 - (y - y')^2$$

soit le produit de deux facteurs P, Q du premier degré en x et y. L'équation en λ admet une racine nulle et deux autres racines réelles. Pour l'une de ces racines les facteurs P, Q sont réels, pour l'autre ils sont imaginaires.

Étant donnée une ellipse $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

en coordonnées rectangulaires, on considère un point fixe M (x', y') et on demande de déterminer deux droites P, Q telles que le carré de la distance d'un point quelconque de l'ellipse à M divisé par le produit de ses distances à P et à Q soit constant, c'est-à-dire indépendant de la position du point de l'ellipse considéré. On formera explicitement les équations de ces droites en supposant M sur l'ellipse. Lieu de leur intersection quand M parcourt l'ellipse.

Inversement, étant donnée la droite (P) $ux + vy - 1 = 0$, peut-on trouver un point M et une droite Q tels que le carré de la distance d'un point quelconque de l'ellipse à M divisé par le produit de ses distances à P, Q, soit constant? Montrer qu'on trouve en général deux positions pour M, symétriques par rapport à P. Comment la droite P doit-elle être placée pour que ces deux solutions soient réelles?

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

École des Mines de Saint-Étienne (1892).

33. — Dérivées des fonctions L arc tg $\frac{x+b}{1-bx}$ par rapport à $\cos x$; arc tg $\frac{2x}{1-x^2}$ par rapport à $\sec x$. $L(x + \sqrt{x^2 + a^2})$ par rapport à $\operatorname{tg} x$; arc sin $(x\sqrt{1-a^2} - a\sqrt{1-x^2})$ par rapport à $1 + x^2$.

34. — Dérivées des fonctions implicites définies par les équations

$$e^x - e^y(x - y)^2 = 0, \qquad x^2 + y^2 - m^2 e^{\operatorname{arc\,sin}\frac{2xy}{x^2+y^2}}.$$

35. — Trouver la limite de $\frac{1 - \cos x}{x}$ pour $x = 0$.

36. — Construire les courbes

(I) $x^4y - 3xy^4 + 2y + x = 0$

(II) $(x^2 - y^2)x + xy - 1 = 0$

(III) $y = 2x + 1 \pm \sqrt{\dfrac{x^2}{x^2 - 1}}$

(IV) $y = \operatorname{tg} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1}$

(V) $y = \cos \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

(VI) $y = xe^{-\frac{1}{1 - x^2}}$

(VII) $x\, e^{x^2+y^2} - ky = 0$

(VIII) $\rho = \dfrac{\cos \omega}{\sin 2\omega + \cos 2\omega}$

(IX) $\rho = \dfrac{(a^2 - b^2) \sin \omega \cos \omega}{\sqrt{a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega}}$

(X) $\rho = \sin \omega \pm \sqrt{1 - \sin \omega}$

(XI) $\rho^2 + \rho (\cos \omega - \sin \omega) + 3 \sin \omega \cos \omega = 0$

(XII) $\rho^2 + \rho (\cos \omega - \sin \omega) + 3 \sin \omega \cos \omega = 0$

(XIII) $\rho = \dfrac{\omega + 1}{\omega - 1}$

(XIV) $\rho = \dfrac{\omega^2 - 3\omega - 2}{\omega^2 - 1}$

37. — Équation générale des hyperboles équilatères telles qu'on puisse par l'origine leur mener deux tangentes faisant un angle donné.

38. — Équation générale des coniques tangentes aux axes de coordonnées et ayant leur centre en un point donné.

39. — On considère une conique tangente au point A à Ox et au point B à Oy. C étant un point quelconque de la conique, on mène CA qui coupe Oy en D et CB qui rencontre Ox en E. Trouver le lieu du milieu de ED quand le point C décrit la conique.

40. — Équation générale des coniques ayant un sommet sur Ox et un autre sur Oy.

QUESTIONS PROPOSÉES

***230.** — En un point M d'une ellipse, on mène la normale qui rencontre le grand axe en N et le petit axe en N'. Si du point M on mène les tangentes aux deux circonférences décrites sur ON et sur ON' comme diamètres, la longueur des tangentes à la première circonférence est égale au demi-petit axe, la longueur des tangentes à la seconde est égale au demi-grand axe.

(E.-N. Barisien.)

231. — Étant donnée une cubique à point double, on lui mène les deux tangentes parallèles à une asymptote : soient M, M' les points de contact. Les droites joignant le point double à ces deux points rencontrent l'asymptote en m et m'. Démontrer que la cubique rencontre son asymptote en un point qui est le milieu de mm'. — Généraliser.

(S. Lattès, lycée de Marseille.)

***232.** — D'un point du plan d'une ellipse on abaisse les quatre normales. Soient N_1, N_2, N_3, N_4 les distances du point d'émission des normales à leurs pieds; P_1, P_2, P_3, P_4 les portions de ces normales interceptées entre les deux axes de l'ellipse. Démontrer la relation

$$\frac{N_1}{P_1} + \frac{N_2}{P_2} + \frac{N_3}{P_3} + \frac{N_4}{P_4} = \text{constante}.$$

(E.-N. Barisien.)

233. — Étudier la série dont le terme général

$$u_n = \frac{n!}{(x + 1)(x + 2)\ldots(x + n)}.$$

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX. — 25918-11-92.

3e Année. N° 4. Janvier 1893.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

NOTE SUR LA LIMITE DE L'EXPRESSION $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$

Nous supposerons $x > 0$ et m entier, positif, et *au moins égal* à x. Considérons la série convergente

$$S = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^m}{1.2\ldots m} + \ldots$$

En posant
$$S_m = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^m}{1.2\ldots m},$$

$$R_m = \frac{x^m}{1.2\ldots m}\left(\frac{x}{m+1} + \frac{x^2}{(m+1)(m+2)} + \ldots,\right),$$

nous aurons
$$S = S_m + R_m; \tag{1}$$

mais pour $m \geqslant x$ on a

$$\frac{x}{m+1} + \frac{x^2}{(m+1)(m+2)} + \ldots < \frac{x}{m+1} + \left(\frac{x}{m+1}\right)^2 + \left(\frac{x}{m+1}\right)^3 + \ldots$$

d'où, puisque le second membre a pour limite

$$\frac{x}{m+1-x},$$

$$R_m < \frac{x^m}{1.2\ldots m} \times \frac{x}{m+1-x}. \tag{2}$$

D'autre part, pour une valeur entière donnée de m,

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = 1 + \frac{x}{1} + \left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{x^2}{1.2} + \ldots + \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)\frac{x^m}{1.2\ldots m}.$$

Or si, $a_1, a_2, \ldots a_n$ désignent des nombres positifs tous inférieurs à 1, on sait que

$$(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n) > 1 - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

Donc
$$\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{p-1}{m}\right) > 1 - \frac{1}{2m}\cdot\frac{p(p-1)}{2}.$$

et par suite

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{p-1}{m}\right)\frac{x^p}{1.2\ldots p} > \frac{x^p}{1.2\ldots p} - \frac{x^2}{2m}\cdot\frac{x^{p-2}}{1.2\ldots(p-2)}.$$

On a donc
$$1 + \frac{x}{1} = 1 + \frac{x}{1},$$

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{x^2}{1.2} > \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^2}{2m}\cdot\frac{1}{1},$$

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\frac{x^3}{1.2.3} > \frac{x^3}{1.2.3} - \frac{x^2}{2m}\cdot\frac{x}{1},$$

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)\frac{x^4}{1.2.3.4} > \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^2}{2m}\cdot\frac{x^2}{1.2},$$

. . . . . .

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)\frac{x^m}{1.2\ldots m} > \frac{x^m}{1.2\ldots m} - \frac{x^2}{2m}\cdot\frac{x^{m-2}}{1.2\ldots(m-2)}.$$

En ajoutant membre à membre, il vient

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m > S_m - \frac{x^2}{2m}S_{m-2}. \tag{3}$$

Les relations (1) et (3) donnent par soustraction

$$S - \left(1+\frac{x}{m}\right)^m < R_m + \frac{x^2}{2m}S_{m-2}. \tag{4}$$

Or il est manifeste que chaque terme du développement de $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ est, à partir du troisième, inférieur au terme correspondant de S_m; le premier membre de l'inégalité précédente est donc positif. Si m croît indéfiniment, R_m a pour limite zéro, S_{m-2} a pour limite S, et $\frac{x^2}{2m}$ a pour limite zéro; on en conclut

$$\lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = S.$$

Mais nous avons surtout pour but d'obtenir une limite supérieure du second membre de l'inégalité (4). Pour cela, remarquons que

$$S_{m-2} < S_m < S,$$

et

$$\frac{x^m}{1.2\ldots m} < S;$$

il en résulte que l'on a

$$R_m + \frac{x^2}{2m}S_{m-2} < \frac{x^m}{1.2\ldots m}\cdot\frac{x}{m+1-x} + \frac{x^2}{2m}S_{m-2} < S\left(\frac{x}{m+1-x} + \frac{x^2}{2m}\right);$$

donc

$$S - \left(1+\frac{x}{m}\right)^m < S.x\left(\frac{1}{m+1-x} + \frac{x}{2m}\right),$$

c'est-à-dire

$$e^x - \left(1+\frac{x}{m}\right)^m < xe^x\left(\frac{1}{m+1-x} + \frac{x}{2m}\right).$$

En particulier, si $x = 1$,

$$e - \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \frac{3e}{2m}.$$

V. Hioux.

Remarque. — Quand on a établi l'égalité

$$\lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = S,$$

en supposant m entier et x positif, on peut, comme pour la limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, lever toutes les restrictions relatives à m et à x. En effet, supposons d'abord $x>0$ et m positif mais quelconque. Quelle que soit la valeur de m, on peut toujours trouver deux entiers consécutifs μ et $\mu+1$ qui le comprennent; on aura donc

$$\left(1+\frac{x}{\mu}\right)^{\mu+1} < \left(1+\frac{x}{m}\right)^m < \left(1+\frac{x}{\mu+1}\right)^{\mu}.$$

Or
$$\left(1+\frac{x}{\mu}\right)^{\mu+1}=\left(1+\frac{x}{\mu}\right)^{\mu}\left(1+\frac{x}{\mu}\right)$$
$$\left(1+\frac{x}{\mu+1}\right)^{\mu}=\left(1+\frac{x}{\mu+1}\right)^{\mu+1}:\left(1+\frac{x}{\mu+1}\right),\ \text{etc.}$$

Supposons m négatif et posons $m=-(m'+x)$; on a
$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^{m}=\left(1-\frac{x}{m'+x}\right)^{-(m'+x)}=\left(\frac{m'+x}{m'}\right)^{m'+x}=\left(1+\frac{x}{m'}\right)^{m'}\cdot\left(1+\frac{x}{m'}\right)^{x}.$$

Or
$$\lim\left(1+\frac{x}{m'}\right)^{m'}=S \qquad \text{et} \qquad \lim\left(1+\frac{x}{m'}\right)^{x}=1,\ \text{etc.}$$

Enfin, soit $x=-x'$, x' étant positif, on a
$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^{m}=\left(1-\frac{x'}{m}\right)^{m}=\left(1+\frac{x'}{m'}\right)^{-m'}$$
en posant $m=-m'$; donc
$$\lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^{m}=\frac{1}{\lim\left(1+\frac{x'}{m'}\right)^{m'}}=\frac{1}{e^{x'}}=e^{x}.$$

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

141. — *On donne un angle constant de sommet* A *et un point fixe* B *dans le plan de cet angle. On considère un cercle variable passant par* A *et* B *; il coupe les côtés de l'angle* A *en* D *et* E.

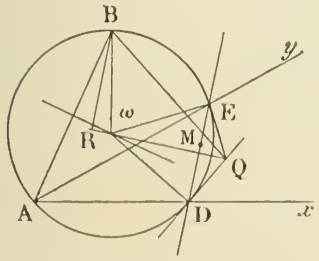
1° Lieu du point M *divisant le segment* DE *dans un rapport donné.*

2° Lieu du pôle Q *de la droite* DE *par rapport au cercle.*

3° Etudier la variation de l'angle ωBQ, ω *désignant le centre du cercle.*

4° Lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du point B *sur la droite* ωQ.

1° Prenons pour axes de coordonnées les côtés Ax, Ay de l'angle donné; si θ désigne l'angle des axes et si l'on pose $\overline{AD}=u$, $\overline{AE}=v$, l'équation du cercle ADE sera



$$x^2+2xy\cos\theta+y^2-ux-vy=0.$$

En exprimant que cette équation est vérifiée pour les coordonnées (a, b) du point B, nous obtenons la relation suivante entre les paramètres u, v :
$$au+bv=h^2,$$
en posant $AB=h$.

Cela posé, les coordonnées du point M qui partage DE dans un rapport donné $-\lambda$, de sorte que
$$\frac{\overline{MD}}{\overline{ME}}=-\lambda,$$
sont
$$x=\frac{u}{1+\lambda}, \qquad y=\frac{\lambda v}{1+\lambda}.$$

Il en résulte immédiatement que le lieu du point M est une droite ayant pour équation

$$(1 + \lambda)(a\lambda x + by) = \lambda h^2.$$

2° On arrive simplement au résultat par des considérations géométriques. Soient, en effet, Q le pôle de DE et ω le centre du cercle ADE. L'angle $B\omega E = 2\widehat{BAy}$; $\widehat{D\omega E} = 2\widehat{DAE} = 2\theta$; donc, en posant $\widehat{BAE} = \alpha$, on a

$$\widehat{B\omega Q} = 2\alpha + \theta;$$

ainsi l'angle $B\omega Q$ est constant. En outre, le triangle rectangle ωEQ donne

$$\omega Q = \omega E . \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\omega B}{\cos\theta};$$

le rapport $\frac{\omega Q}{\omega B}$ étant constant et l'angle compris entre ces côtés étant constant, le triangle $B\omega Q$ reste semblable à lui-même, et comme le point ω décrit la perpendiculaire élevée au milieu de AB, il en résulte que le point Q décrit aussi une droite.

3° L'angle ωBQ est constant: il n'y a donc pas lieu de chercher sa variation.

4° Soit BR la perpendiculaire abaissée de B sur ωQ; l'angle $B\omega R$ est constant, donc le triangle $B\omega R$ qui est rectangle varie en restant semblable à lui-même, le point R décrit donc aussi une droite; les droites trouvées sont faciles à construire.

On peut encore remarquer que l'enveloppe de ωQ est une parabole qui a pour foyer le point B; il en résulte que le lieu du point R est la tangente au sommet de cette parabole.

SOLUTION ANALYTIQUE DES QUESTIONS 2° ET 4°.

2° Prenons pour axe des y la droite AB et pour axe des x la perpendiculaire à AB menée par A. En posant $AB = 2h$, l'équation d'un cercle passant par A et B sera

$$x^2 + y^2 - 2hy - 2\lambda x = 0.$$

La polaire du piont x_0, y_0 a pour équation

$$x(x_0 - \lambda) + y(y_0 - h) - (hy_0 + \lambda x_0) = 0.$$

L'équation du faisceau des droites joignant le point A aux points de rencontre de cette droite et du cercle est

$$(x^2 + y^2)(hy_0 + \lambda x_0) - 2(hy + \lambda x)[x(x_0 - \lambda) + y(y_0 - h)] = 0.$$

Il faut exprimer que cette équation représente les côtés de l'angle donné; si l'on appelle α et β les coefficients angulaires de ces côtés, on doit donc avoir

$$\alpha + \beta = + \frac{2[h(x_0 - \lambda) + \lambda(y_0 - h)]}{hy_0 + \lambda x_0 - 2h(y_0 - h)},$$

$$\alpha\beta = \frac{hy_0 + \lambda x_0 - 2\lambda(x_0 - \lambda)}{hy_0 + \lambda x_0 - 2h(y_0 - h)},$$

ou, en posant $x_0 = X$, $y_0 - 2h = Y$,

$$\alpha + \beta = 2\,\frac{hX + \lambda Y}{\lambda X - hY},$$

$$\alpha\beta = \frac{hY + 2h^2 + 2\lambda^2 - \lambda X}{\lambda X - hY}.$$

En chassant les dénominateurs et ordonnant par rapport à λ, il vient

$$\lambda[X(\alpha+\beta)-2Y]-h[Y(\alpha+\beta)+2X]=0,$$
$$2\lambda^2-\lambda X(1+\alpha\beta)+2h^2+hY(1+\alpha\beta)=0.$$

En éliminant λ on trouve

$$(X^2+Y^2)\left[(1+\alpha\beta)[X(\alpha+\beta)-2Y]-h[(\alpha+\beta)^2+4]\right]=0,$$

ce qui donne les droites isotropes menées par le point fixe B, et une droite réelle.

4° En prenant pour axes les côtés de l'angle comme plus haut, on trouve que le pôle de DE est défini par les équations

$$ux+y(2u\cos\theta-v)-u^2=0, \tag{1}$$
$$(2v\cos\theta-u)\,x+vy-v^2=0, \tag{2}$$

et les coordonnées du centre du cercle sont déterminées par les équations

$$2x+2y\cos\theta-u=0, \tag{3}$$
$$2x\cos\theta+2y-v=0. \tag{4}$$

En ajoutant les équations (3) et (4) membre à membre après avoir multiplié par u et $-v$, on obtient le même résultat qu'en retranchant (1) et (2) membre à membre; donc

$$2x\,(u-v\cos\theta)+2y\,(u\cos\theta-v)-u^2+v^2=0 \tag{5}$$

est l'équation de ωQ. La perpendiculaire abaissée du point B sur cette droite a pour équation

$$v\,(x-a)+u\,(y-b)=0\,; \tag{6}$$

d'ailleurs

$$vb+ua=h^2. \tag{7}$$

Il s'agit d'éliminer u et v entre les équations (5), (6), (7).

Les équations (6) et (7) donnent, en posant $x-a=X$, $y-b=Y$:

$$u=\frac{h^2X}{aX-bY},\qquad v=\frac{-h^2Y}{aX-bY};$$

l'équation du lieu est donc

$$2(aX-bY)\,[(X+Y\cos\theta)\,(X+a)+(X\cos\theta+Y)\,(Y+b)]=h^2(X^2-Y^2).$$

En développant, on obtient, en observant que $h^2=a^2+2ab\cos\theta+b^2$,

$$(X^2+2XY\cos\theta+Y^2)\,[2\,(aX-bY)+a^2-b^2]=0.$$

En laissant de côté les droites isotropes passant par B, on obtient une droite dont l'équation rapportée aux axes primitifs est

$$2\,(ax-by)-a^2+b^2=0.$$

Cette droite passe par le milieu de AB et elle est parallèle à la symétrique de AB par rapport à la bissectrice de l'angle donné.

Enveloppe de ωQ.

En posant $\qquad x+y\cos\theta=X,\qquad x\cos\theta+y=Y,$

l'équation de ωQ peut s'écrire $\qquad 2uX-2vY-u^2+v^2=0. \qquad (8)$

Pour obtenir l'enveloppe, nous écrirons les équations

$$\frac{X-u}{a}=\frac{Y-v}{-b}=\frac{aX+bY-h^2}{a^2-b^2}.$$

Mais l'équation (8) peut se mettre sous la forme

$$(X-u)^2-(Y-v)^2=X^2-Y^2;$$

l'équation de l'enveloppe est donc

$$(aX + bY - h^2)^2 = (a^2 - b^2)(X^2 - Y^2)$$

ou, en développant, $$(bX + aY)^2 - 2h^2(aX + bY) + h^4 = 0,$$

c'est-à-dire

$$[(b + a\cos\theta)x + (a + b\cos\theta)y]^2 - 2h^2[(a + b\cos\theta)x + (b + a\cos\theta)y] + h^4 = 0.$$

C'est l'équation d'une parabole dont l'axe est perpendiculaire à la droite lieu de R.

En transportant l'origine du point B, on obtient l'équation

$$[(b + a\cos\theta)x + (a + b\cos\theta)y]^2 + (b^2 - a^2)\sin^2\theta[2(ax - by) + a^2 - b^2] = 0;$$

on voit que la droite lieu de R est bien la tangente au sommet à cette parabole. Enfin on vérifie aisément que le foyer est l'origine des coordonnées, c'est-à-dire le point B. En effet, une tangente quelconque à cette parabole a pour équation

$$(b + a\cos\theta)x + (a + b\cos\theta)y = m\left[ax - by + \frac{a^2 - b^2}{2}\right] + \frac{(a^2 - b^2)\sin^2\theta}{2m};$$

pour que cette droite passe par l'origine, il faut prendre $m = \pm i\sin\theta$; son équation est alors, en supposant par exemple que $m = i\sin\theta$,

$$(b + a\cos\theta)x + (a + b\cos\theta)y = i\sin\theta(ax - by)$$

ou $$x[b + a(\cos\theta - i\sin\theta)] + y[a + b(\cos\theta + i\sin\theta)] = 0$$

ou encore $$x(\cos\theta - i\sin\theta)[b(\cos\theta + i\sin\theta) + a] + y[b(\cos\theta + i\sin\theta) + a] = 0,$$

ou enfin $$y + x(\cos\theta - i\sin\theta) = 0,$$

équation qui représente une droite isotrope.

---

176. — *On donne trois coniques ayant un foyer* F *commun.*

1° Démontrer que l'enveloppe des droites telles que leurs pôles par rapport à ces trois coniques soient en ligne droite est une conique ayant un de ses foyers en F.

2° On considère les surfaces de révolution engendrées par la révolution autour de leur axe focal de trois coniques ayant un foyer commun. Démontrer que l'enveloppe des plans tels que leurs pôles par rapport aux trois surfaces soient en ligne droite est un cône du second degré.

3° Condition pour que ce cône devienne un cylindre.

1° Les polaires réciproques des trois coniques données relatives à un cercle de centre F sont trois cercles, et la transformée de l'enveloppe cherchée est le lieu des points tels que leurs polaires par rapport à ces trois cercles soient concourantes : c'est, comme on sait, le cercle qui les coupe orthogonalement. L'enveloppe cherchée est donc bien une conique de foyer F. Cette courbe est d'ailleurs aussi l'enveloppe de la droite qui passe par les trois pôles considérés, et le lieu du point d'intersection des droites ainsi obtenues, conjuguées à la fois aux trois coniques, est la directrice de leur enveloppe relative au foyer F.

2° Les polaires réciproques des trois surfaces considérées relatives à une sphère ayant pour centre le foyer commun aux coniques génératrices sont, de même, trois sphères, et la transformée de l'enveloppe cherchée est le lieu des points tels que leurs plans polaires, par rapport à ces trois sphères, aient une droite commune. Ce lieu est, comme on le voit aisément, le cercle qui coupe orthogonalement les sections de ces sphères par le plan de leurs centres. Par suite, l'enveloppe cherchée est un cône dont le sommet est le point commun aux plans polaires du foyer considéré par rapport aux trois quadriques.

3° Ce cône deviendra un cylindre quand ces trois plans seront parallèles à une même droite, ou encore, puisqu'ils sont perpendiculaires aux axes des quadriques de révolution correspondantes, quand ces axes seront dans un même plan.

(Ernest Duporcq, H. Cheronnet.)

GÉNÉRALISATION

1° En transformant homographiquement on obtient l'énoncé plus général :

Étant données trois coniques tangentes à deux droites, l'enveloppe des droites telles que leurs pôles par rapport à ces trois coniques soient en ligne droite est une conique tangente aux deux tangentes communes.

Si nous transformons de nouveau par polaires réciproques, l'énoncé devient :

Le Jacobien de trois coniques ayant deux points communs est une conique passant par ces deux points.

Enfin, en transformant une dernière fois par homographie de façon que les deux points communs deviennent les points cycliques, on a la proposition connue :

Le Jacobien de trois cercles est un cercle.

(H. Cheronnet.)

Note. — On appelle *Jacobien* de trois coniques le lieu des points dont les polaires par rapport à ces coniques sont concourantes. Si l'on désigne par $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ les équations des trois coniques et par U_1, U_2, U_3 les dérivées de U par rapport à x, y, z, et de même par V_1, V_2, V_3 les dérivées de V, etc., les équations des polaires du point x, y, z étant

$$XU_1 + YU_2 + ZU_3 = 0,$$
$$XV_1 + YV_2 + ZV_3 = 0,$$
$$XW_1 + YW_2 + ZW_3 = 0,$$

le Jacobien a pour équation
$$\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \\ W_1 & W_2 & W_3 \end{vmatrix} = 0;$$
c'est donc, en général, une cubique.

---

177. — *Un cercle quelconque passant par le sommet d'une parabole, coupe cette parabole en trois autres points* A, B, C. *Trouver le lieu du point de concours des normales à la parabole en ces points quand le rayon du cercle reste constant.*

Rapportons la parabole à son axe et sa tangente au sommet, soit

$$y^2 - 2px = 0$$

son équation.

Tout cercle passant par le sommet de cette parabole la rencontre en trois autres points A, B, C tels que les normales à la parabole en ces points soient concourantes, et si l'on appelle α, β les coordonnées du point de concours P de ces normales, l'équation du cercle considéré est

$$x^2 + y^2 - (p + \alpha)x - \frac{\beta y}{2} = 0.$$

Le carré du rayon de ce cercle est égal à

$$\frac{(p + \alpha)^2}{4} + \frac{\beta^2}{16}.$$

Pour que ce rayon reste constamment égal à R, il faut donc que le point P décrive la conique représentée par l'équation

$$\frac{(x+p)^2}{4R^2} + \frac{y^2}{16R^2} - 1 = 0;$$

on voit que le lieu est une ellipse ayant pour centre le point de coordonnées

$$x = -p, \qquad y = 0,$$

dont le petit axe est l'axe des x et le grand axe la droite

$$x = -p;$$

enfin la longueur du demi-petit axe est 2R, celle du demi-grand axe est 4R.

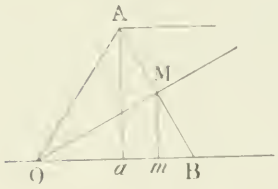
(J. Hais, à Pierres.)

Solutions analogues : MM. H. Allard (Condorcet); Audouin (Louis-le-Grand); Bourrienne (Ecos); Duhameaux (Amiens); L. Espinat (Espinchal, Puy-de-Dôme); E. Gueden (lycée Saint-Louis); Vazou (Falaise).

---

178. — *On joint le sommet* O *d'une parabole* P *à un point quelconque* M *de cette parabole. Lorsque* M *se déplace sur* P, *la droite menée par le point* M *et perpendiculaire à* OM *est normale à une parabole* P_1.

Première solution. — Soit B le point où la perpendiculaire MB à OM coupe l'axe de la parabole P et soit A son symétrique par rapport à M. On a



$$\overline{Mm}^2 = Om.mB = Om.2p,$$

p désignant le paramètre de la parabole P. La projection de AB sur l'axe est donc égale à $4p$, et cette longueur est par suite la sous-normale de la parabole de foyer O, d'axe OB et passant par A, à laquelle la droite AB est évidemment normale. Cette parabole est donc indépendante du point M, ce qui vérifie l'énoncé.

(Ernest Duporcq.)

Solution analogue : M. Audouin (Louis-le-Grand).

Remarque. — Ce résultat peut s'énoncer autrement : on peut dire que la podaire de la développée d'une parabole relative à son foyer est une parabole ayant ce foyer pour sommet, et comme il est bien évident que la figure inverse de la podaire d'une courbe relative à l'origine d'inversion, est la polaire réciproque de cette courbe par rapport à un cercle admettant cette origine pour centre, on voit que la développée d'une parabole peut être considérée comme la polaire réciproque par rapport à un cercle d'une cissoïde de Dioclès.

(Ernest Duporcq.)

Deuxième solution. — Soit $$y^2 - 2px = 0,$$

l'équation de la parabole rapportée à son axe et à sa tangente au sommet ; soient α, β les coordonnées d'un point M de cette parabole.

L'équation de la perpendiculaire en M à la droite OM est

$$y - \beta = -\frac{\beta}{2p}\left(x - \frac{\beta^2}{2p}\right),$$

ce qui peut s'écrire, en posant $-\frac{\beta}{2p} = m$,

$$y = m(x - 2p) - 2pm^3,$$

ou, en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes au point $\begin{cases} y = 0, \\ x = -2p. \end{cases}$

$$y = m(x - 4p) - \frac{4pm^3}{2};$$

c'est l'équation d'une normale à la parabole P_1 ayant pour équation

$$y^2 - 8px = 0.$$

Si l'on revient aux anciens axes, cette parabole P_1 a pour équation

$$y^2 - 8p(x + 2p) = 0,$$

ce qui peut s'écrire $$x^2 + y^2 - (x + 4p)^2 = 0.$$

La parabole P_1 a donc pour foyer le point O et pour directrice la droite

$$x = -4p.$$

(J. Hais, à Pierres.)

Troisième solution. — Soient $y^2 - 2px = 0$, $x = my$ les équations de la parabole P et de la droite OM. La perpendiculaire à OM a pour équation

$$y - 2pm = -m(x - 2pm^2)$$

ou $$m^3 + \frac{2p - x}{2p}\, m - \frac{y}{2p} = 0.$$

L'enveloppe a donc pour équation

$$2(2p - x)^3 + 27py^2 = 0.$$

En transportant l'origine au point $(-2p, 0)$, cette équation devient

$$2(4p - x)^3 + 27py^2 = 0,$$

ou $$8(4p - x)^3 + 27.4py^2 = 0.$$

On reconnaît la développée de la parabole ayant pour équation $y^2 - 8px = 0$, ou par rapport aux premiers axes,

$$y^2 = 8p(x + 2p),$$

c'est-à-dire $$x^2 + y^2 = (x + 4p)^2.$$

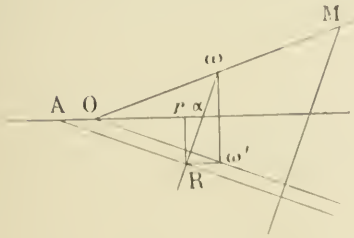
H. Allard (Lycée Condorcet).

Solutions analogues : MM. Audibert (Marseille); Bourrienne (Ecos) ; H. Cheronnet (Condorcet) ; Vazou (Falaise).
Les autres solutions envoyées étaient inexactes.

---

179. — *Étant donnée une parabole* P *de sommet* O, *et* M *un point quelconque sur la parabole, le cercle décrit sur* OM *comme diamètre coupe cette parabole en deux autres points* P, Q. *Démontrer que si le point* M *se déplace sur la parabole donnée : 1° la droite* PQ *passe par un point fixe ; 2° la perpendiculaire abaissée de* M *sur* PQ, *reste normale à une parabole déterminée.*

Première solution. — 1° Les directions des droites OM et PQ étant symétriques par rapport à l'axe, le milieu R de PQ est sur le diamètre passant par ω', symétrique du milieu ω de OM par rapport à l'axe, et la droite ωR est perpendiculaire à PQ. On a donc, A étant le point où PQ coupe l'axe, et α le milieu de ωR,



$$AO = R\omega' = 2\alpha r = 2p,$$

car αr est évidemment égale à la sous-normale de la parabole P relative au point où elle coupe le diamètre Rω'. Le point A est donc fixe.

2° Le segment Rω' ayant une longueur fixe, le lieu du point R est une parabole de sommet A, égale à celle que décrit le point ω'. Par suite (voir question 178), la droite ωR est normale à une

parabole de foyer A et de paramètre $2p$; on en déduit que la perpendiculaire abaissée de M sur PQ est normale à une parabole dont le foyer est le symétrique de O par rapport à A, et le paramètre égal à $4p$.

Ernest Duporcq.

Deuxième solution. — 1° Rapportée à son axe et à sa tangente au sommet, la parabole est

$$y^2 = 2px.$$

Si $y = mx$ représente la corde OM, l'équation de la droite PQ sera de la forme

$$y + mx - mx_0 = 0.$$

Tout revient à montrer que x_0 est invariable. Or le cercle passant par les points O, M, P, Q a pour équation

$$f \equiv (y - mx)(y + mx - mx_0) - (1 + m^2)(y^2 - 2px) = 0,$$

et son centre sera sur OM si les équations

$$y = mx, \qquad f'_x = 0, \qquad f'_y = 0,$$

sont compatibles, ce qui donne la condition $x_0 = -2p$.

2° Les coordonnées de M sont d'ailleurs

$$x = \frac{2p}{m^2}, \qquad y = \frac{2p}{m};$$

la perpendiculaire abaissée de M sur PQ est donc

$$y - \frac{2p}{m} = \frac{1}{m}\left(x - \frac{2p}{m^2}\right),$$

dont l'enveloppe est définie par l'équation

$$2(2p + x)^3 - 27py^2 = 0,$$

qui représente une parabole semi-cubique, ce qui démontre la propriété.

E. Bourrienne, à Écos.

Solutions analogues. — MM. Audibert (Marseille); Audouin (Louis-le-Grand); H. Allard (Condorcet); J. Hais (à Pierres); Vazou (Falaise). M. L. Espinat (à Espinchal) et M. Etienne Burileano (à Turnu-Severin, Roumanie), ont résolu la première partie de la question.

---

193. — *Étant donné un limaçon de Pascal et un cercle* Γ *ayant pour centre le point double* O *du limaçon, une tangente quelconque au cercle* Γ *coupe le limaçon en quatre points* A, B, C, D. *Démontrer les relations*

$$OA + OB + OC + OD = \text{const.}$$
$$OA.OB.OC.OD = \text{const.}$$

Soient

$$\rho = a + b\cos\omega \qquad (1)$$

l'équation d'un limaçon de Pascal, et

$$\rho = \frac{R}{\cos(\omega - \alpha)} \qquad (2)$$

l'équation d'une tangente au cercle de rayon R ayant pour centre le point double du limaçon. Éliminons ω entre les équations (1) et (2); on obtient immédiatement

$$\left(\frac{\rho - a}{b}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\alpha}\left[\frac{R}{\rho} - \frac{\rho - a}{b}\cos\alpha\right]^2 = 1,$$

$$\rho^2\left(\frac{\rho - a}{b}\right)^2 - 2R\rho\,\frac{\rho - a}{b}\cos\alpha - \rho^2\sin^2\alpha + R^2 = 0.$$

Donc, en appelant $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ les quatre racines, on a

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 = 2a.$$

$$\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4 = b^2R^2.$$

La première de ces relations est indépendante de R.

LÉVÊQUE (Louis-le-Grand.)

Ont envoyé des solutions exactes : MM. Charles BRAILLION (lycée d'Amiens), DUHAMEAUX (lycée d'Amiens), J. HAIS (à Pierres), DE PANGE (à Paris).

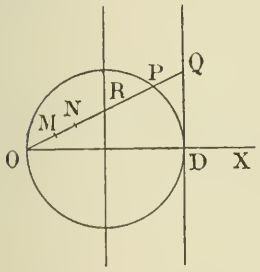
M. Lévêque fait remarquer que d'une façon générale : *la somme des distances à un foyer des points d'intersection d'une cartésienne avec une sécante quelconque est constante.* (Voir par exemple, Salmon, *Traité de Géométrie analytique*, courbes planes, p. 354.)

---

194. — *On considère une cissoïde de Dioclès et une strophoïde droite ayant même cercle directeur et même point double* O. *Une sécante coupe la cissoïde aux points* A, B, C *et la strophoïde aux points* A′, B′, C′. *Démontrer la relation*

$$\frac{OA.OB.OC}{OA'.OB'.OC'} = \frac{1}{2}.$$

Considérons un cercle ayant pour diamètre OD et soient P et Q les points d'intersection d'une sécante OP avec ce cercle et avec la tangente en D; on prend $\overline{OM} = \overline{PQ}$. En posant $OM = \rho$ et en désignant par ω l'angle MOD, on trouve immédiatement



$$\rho = \frac{2R}{\cos\omega} - 2R\cos\omega = \frac{2R\sin^2\omega}{\cos\omega}; \qquad (1)$$

c'est l'équation de la cissoïde.

Soit R le point de rencontre de la même sécante avec le diamètre perpendiculaire à OD et prenons $\overline{ON} = \overline{RP} = r$; on aura

$$r = 2R\cos\omega - \frac{R}{\cos\omega} = \frac{R\cos 2\omega}{\cos\omega}; \qquad (2)$$

c'est l'équation d'une strophoïde droite.

Soit
$$\rho(a\cos\omega + b\sin\omega) - 1 = 0 \qquad (3)$$

l'équation d'une droite. Éliminons ω entre les équations (1) et (3); pour cela nous mettrons l'équation (1) sous la forme

$$2R\cos^2\omega + \rho\cos\omega - 2R = 0$$

et l'équation (3) sous la forme $\quad b\rho\sin\omega = 1 - a\rho\cos\omega,$

d'où, en élevant au carré et remplaçant $\sin^2\omega$ par $1 - \cos^2\omega$,

$$(a^2 + b^2)\rho^2\cos^2\omega - 2a\rho\cos\omega + 1 - b^2\rho^2 = 0. \qquad (4)$$

L'élimination de $\cos\omega$ donne l'équation

$$4R^2(1 + a^2\rho^2)^2 + \rho^2[4aR + \rho^2(a^2 + b^2)][1 - b^2\rho^2 - 4aR] = 0$$

ou
$$4R^2 + \ldots - b^2(a^2 + b^2)\rho^6 = 0.$$

Le produit des racines, c'est-à-dire, en appelant A, B, C les points d'intersection de la sécante (3) avec la cissoïde,

$$\overline{OA}^2.\overline{OB}^2.\overline{OC}^2 = \frac{4R^2}{b^2(a^2 + b^2)}.$$

Éliminant de même $\cos\omega$ entre l'équation (4) et l'équation de la strophoïde écrite ainsi (en mettant ρ au lieu de r) :

$$2R\cos^2\omega - \rho\cos\omega - R = 0,$$

ce qui donne $$R^2[2 + (a^2 - b^2)\rho^2]^2 - \rho^2[4aR - \rho^2(a^2 + b^2)][1 - b^2\rho^2 + 2aR] = 0$$

ou $$4R^2 + \ldots - b^2(a^2 + b^2)\rho^6 = 0; \qquad (5)$$

donc $$\overline{OA'}^2 . \overline{OB'}^2 . \overline{OC'}^2 = \frac{4R^2}{b^2(a^2 + b^2)}.$$

par suite $$\frac{OA.OB.OC}{OA'.OB'.OC'} = 1.$$

Si l'on écrit l'équation de la strophoïde sous la forme

$$\rho = \frac{2R\cos 2\omega}{\cos\omega},$$

l'équation (5) sera $$16R^2 + \ldots - b^2(a^2 + b^2)\rho^6 = 0,$$

et par suite on trouvera $$\frac{OA.OB.OC}{OA'.OB'.OC'} = \frac{1}{2}.$$

Ont résolu la question : MM. Brailion (lycée d'Amiens); Duhameaux (lycée d'Amiens); L. Espinat (à Espinchal, Puy-de-Dôme); J. Hais (à Pierres ; De Pange ; Charles Turchi.

---

195. — *Trouver le lieu des points tels qu'en menant des tangentes à une cardioïde donnée, la somme des rayons vecteurs joignant le point de rebroussement aux points de contact des tangentes soit constante ; 2° trouver le lieu des points tels que le produit des mêmes rayons vecteurs soit constant.*

L'équation de la cardioïde étant mise sous la forme

$$\rho = r\cos\omega + r \qquad (1)$$

ou, en coordonnées rectilignes,

$$(x^2 + y^2)^2 - 2rx(x^2 + y^2) - r^2y^2 = 0,$$

la première polaire du point (x_0, y_0) a pour équation

$$2(xx_0 + yy_0)[x^2 + y^2 - rx] - r(x + x_0)(x^2 + y^2) - r^2y(y + y_0) = 0$$

ou, en coordonnées polaires, après suppression du facteur ρ,

$$2\rho(x\cos\omega + y\sin\omega)(\rho - r\cos\omega) - r\rho(\rho\cos\omega + x) - r^2\sin\omega(\rho\sin\omega + y) = 0, \qquad (2)$$

en écrivant x et y au lieu de x_0 et y_0. On obtiendra l'équation aux distances du point de rebroussement aux points de contact en éliminant ω entre les équations (1) et (2). Remplaçons d'abord $\cos\omega$ par $\frac{\rho - r}{r}$ dans l'équation (2), qui devient ainsi

$$2\rho[x(\rho - r) + ry\sin\omega] - \rho[\rho(\rho - r) + rx] - r^2y\sin\omega - r^2\rho + \rho(\rho - r)^2 = 0.$$

d'où l'on déduit $$\sin\omega = \frac{\rho[x(2\rho - 3r) - r\rho]}{ry(r - 2\rho)}.$$

L'équation cherchée est donc

$$\left(\frac{\rho - r}{r}\right)^2 + \frac{\rho^2[x(2\rho - 3r) - r\rho]^2}{r^2y^2(r - 2\rho)^2} = 1$$

ou, en supprimant le facteur $\frac{\rho}{r^2}$,

$$y^2(r - 2\rho)^2(\rho - 2r) + \rho[x(2\rho - 3r) - r\rho]^2 = 0.$$

Développons et ordonnons

$$\rho^3[4y^2 + (2x - r)^2] - 6r[2y^2 + x(2x - r)]\rho^2 + \ldots - 2r^3y^2 = 0.$$

Écrivons que la somme des rayons vecteurs est égale à une constante k, ce qui donne pour l'équation du premier lieu

$$k[4(x^2 + y^2 - rx) + r^2] - 6r[2(x^2 + y^2) - rx] = 0$$

ou

$$4(k - 3r)(x^2 + y^2) + 2r(3r - 2k)x + kr^2 = 0.$$

Le premier lieu est donc un cercle ayant son centre sur la tangente de rebroussement à la cardioïde.

Écrivons ensuite que le produit des rayons vecteurs est constant, ce qui donne

$$h^3[4(x^2 + y^2 - rx) + r^2] - 2r^3y^2 = 0,$$

h^3 désignant la constante. En ordonnant, on obtient

$$4h^3x^2 + (4h^3 - 2r^3)y^2 - 4h^3rx + r^2h^3 = 0$$

ou

$$(4h^3 - 2r^3)y^2 + h^3(2x - r)^2 = 0.$$

Le lieu se compose donc de deux droites également inclinées sur la tangente de rebroussement et qui sont réelles si l'on suppose $h^3 < \frac{1}{2}r^3$. Quand $h^3 = \frac{1}{2}r^3$, les droites sont confondues en une seule perpendiculaire à l'axe des x.

Ont résolu la question : MM. Braillion, Duhameaux (lycée d'Amiens); de Pange.

---

197. — *Trouver l'enveloppe d'une droite telle que ses points de rencontre avec une cissoïde donnée et avec l'axe de symétrie de cette courbe forment une division harmonique.*

L'équation du faisceau des droites joignant l'origine des coordonnées aux points de rencontre de la cissoïde.

$$x(x^2 + y^2) - 2Ry^2 = 0,$$

et de la droite

$$ux + vy + w = 0.$$

est la suivante :

$$wx(x^2 + y^2) + 2Ry^2(ux + vy) = 0. \qquad (1)$$

L'axe de symétrie de la cissoïde ayant pour équation $y = 0$, le faisceau des quatre droites a pour équation

$$wxy(x^2 + y^2) + 2Ry^3(ux + vy) = 0.$$

Or, la condition pour que le faisceau

$$A_0x^4 + 4A_1x^3y + 6A_2x^2y^2 + 4A_3xy^3 + A_4y^4 = 0$$

soit harmonique étant

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix} = 0,$$

la condition de l'énoncé est exprimée par l'équation

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{4}w & 0 \\ \frac{1}{4}w & 0 & \frac{w}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{R}u \\ 0 & \frac{w}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{R}u & +2\,\mathrm{R}v \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire $vw^2 = 0$.

L'enveloppe se réduit donc à deux points qui sont l'origine et le point à l'infini dans la direction Oy.

Ch. Braillion, Duhameaux (lycée d'Amiens).

M. Ch. Turchi (Ferrare), qui a trouvé le même résultat, a cherché en outre ce que devient le problème quand on remplace l'axe de symétrie de la cissoïde par la perpendiculaire à cette droite menée par le point de rebroussement. Le faisceau des quatre droites qui doit être harmonique est alors représenté par

$$wx^2(x^2+y^2)+2\mathrm{R}xy^2(ux+vy)=0;$$

la condition d'harmonie est alors

$$\begin{vmatrix} w & 0 & \frac{w}{6}+\frac{\mathrm{R}u}{3} \\ 0 & \frac{w}{6}+\frac{\mathrm{R}u}{3} & \frac{\mathrm{R}v}{2} \\ \frac{w}{6}+\frac{\mathrm{R}u}{3} & \frac{\mathrm{R}v}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant,

$$\left(\frac{w}{6}+\frac{\mathrm{R}u}{3}\right)^3+\frac{\mathrm{R}^2v^2}{4}w=0,$$

$$(w+2\mathrm{R}u)^3+54\mathrm{R}^2v^2w=0. \qquad (2)$$

Or, si l'on écrit que le faisceau représenté par l'équation (1) a un rayon double, on trouve la condition

$$(2\mathrm{R}u+w)^3+27\mathrm{R}^2v^2w=0. \qquad (3)$$

On obtient ainsi l'équation tangentielle de la cissoïde; or si l'on compare les équations (2) et (3), on voit que l'on passe de l'équation (2) à l'équation (3) en changeant v en $\frac{v}{\sqrt{2}}$; il en résulte que si on cherche l'équation tangentielle de la courbe ayant pour équation

$$2y^2=\frac{x^3}{2\mathrm{R}-x}$$

ou

$$x[(y\sqrt{2})^2+x^2]-2\mathrm{R}(y\sqrt{2})^2=0,$$

en écrivant l'équation d'une droite sous la forme

$$ux+\frac{v}{\sqrt{2}}(y\sqrt{2})+w=0,$$

on aura les mêmes calculs à faire que pour la cissoïde; on en conclut que l'équation (3) est l'équation tangentielle de la courbe représentée par l'équation

$$2y^2=\frac{x^3}{2\mathrm{R}-x}.$$

CONCOURS DE 1892 *(suite)*.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Épreuve définitive.

Épure.

On prendra comme ligne de terre le petit axe de la feuille.

Un tétraèdre régulier SABC, S'A'B'C' repose par la face ABC, A'B'C' sur le plan horizontal. Cette face a pour centre le point S : $x = -2^{cm}$, $y = 10^{cm}$, et pour sommet le point A : $x = -11^{cm}$, $y = 10^{cm}$.

On considère :

1° Le cône de révolution ayant pour sommet AA', et pour base la circonférence inscrite dans la face opposée SBC, S'B'C'.

2° La surface gauche de révolution engendrée par lesarêtes (SB, S'B') (SC, S'C') en tournant autour de la verticale menée par le centre de la face SBC, S'B'C'.

Représenter dans les deux projections, le solide commun au cône et à l'hyperboloïde.

QUESTIONS PROPOSÉES

***234.** — Étant donné un quadrilatère ABCM dont trois sommets A, B, C sont fixes, le quatrième parcourant une droite Δ :

1° Trouver le lieu du milieu de la troisième diagonale UV du quadrilatère complet; 2° Étant donné un point P du lieu, construire le quadrilatère correspondant.

(A. Audouin.)

235. — Un diamètre d'une ellipse est donné en grandeur et en position; son conjugué est donné en grandeur seulement. Trouver le lieu des foyers de l'ellipse.

(A. Morel, ingénieur au Creusot.)

236. — On donne une ellipse E de centre O. D'un point M de cette ellipse comme centre, avec OM pour rayon, on décrit un cercle C. Ce cercle rencontre le grand axe de l'ellipse en un point A, le petit axe en un point B, le diamètre OM en un point α et le diamètre conjugué de OM en un point β. Enfin la tangente en M à l'ellipse est rencontrée par le même cercle en P et en Q. Le point M décrivant l'ellipse E, on demande :

1° Le lieu du point β ;

2° L'enveloppe de la droite AB;

3° Le lieu du point d'intersection des droites AB et αβ :

4° Le lieu des points P et Q.

(James Hais.)

237. — On donne une hyperbole équilatère H. Par son centre O on fait passer un cercle C de centre ω et l'on considère les deux paraboles P, P' qui passent par l'intersection du cercle et de l'hyperbole; l'une de ces paraboles P est rencontrée par l'axe focal de l'hyperbole H en un seul point A à distance finie, et l'autre parabole P' est rencontrée par l'autre axe en un seul point B à distance finie.

1° Démontrer que les polaires Δ, Δ' du point O par rapport aux paraboles P, P′ sont parallèles et à la même distance du point O, que la droite AB est à une distance moitié moindre du même point et que les axes des deux paraboles P, P′ passent par le point milieu du segment $O\omega$.

2° Le point ω décrivant l'hyperbole H, trouver les lieux des points d'intersection des droites Δ, Δ' par la droite AB, l'enveloppe de la droite AB et les lieux des sommets des deux paraboles P, P′.

(James Hais.)

238. — Étant donnés un ellipsoïde et une droite DD′ perpendiculaire à l'un des plans principaux de cet ellipsoïde, on considère le triangle $M_1M_2M_3$ qui a pour sommets les points d'intersection du plan principal considéré avec les trois axes du cône des normales issues d'un point P de la droite DD′. Démontrer que, lorsque le point P décrit la droite DD′ :

1° Le point de concours des hauteurs du triangle $M_1M_2M_3$ est fixe;

2° Le triangle $M_1M_2M_3$ est inscrit à une conique fixe et circonscrit à une deuxième conique fixe;

3° Trouver le lieu géométrique des centres des cercles tangents aux trois côtés du triangle $M_1M_2M_3$.

(P. Puig, professeur au lycée d'Agen.)

239. — AM, AM′ sont deux droites fixes, S un point fixe, SMM′ une transversale. Sur SM on décrit un triangle SMP directement semblable au triangle SAM′. Le lieu de P est une conique dont le point S est un foyer. (Genese.)

240. — C est le centre d'une hyperbole, A un sommet, AT, AT′ sont des parallèles aux asymptotes. CTT′ est une transversale qui rencontre l'hyperbole en P. Prouver que $\overline{CP}^2 = CT.CT'$.

(Genese.)

241. — Si l'on pose $\operatorname{tg}(a + \lambda i) = x + yi$, a, x et y étant réels, prouver que

$$x^2 + y^2 + 2x.\operatorname{cotg} 2a = 1.$$

(Genese.)

242. — Prouver que $x - 2$ divise le déterminant :

$$\begin{vmatrix} x & \frac{l}{m} + \frac{m}{l} & \frac{n}{l} + \frac{l}{n} \\ \frac{l}{m} + \frac{m}{l} & x & \frac{m}{n} + \frac{n}{m} \\ \frac{n}{l} + \frac{l}{n} & \frac{m}{n} + \frac{n}{m} & x \end{vmatrix}$$

et trouver le quotient. (Genese).

Les questions 239, 240, 241, 242 sont extraites des examens de décembre 1892 du collège d'Aberystwyth (University College of Wales, Aberystwyth, Terminal Examination, December 1892, Advanced Class.)

VIENNENT DE PARAITRE :

Cours de mécanique, par M. Charles Brisse, professeur de mathématiques spéciales au lycée Condorcet.

Supplément, contenant la *trigonométrie* et la *mécanique*, par M. Gohierre de Longchamps, professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis.

Traité de mécanique, par M. V. Jamet, professeur au lycée de Marseille.

ERRATUM

La figure de la question 224 (p. 45) a été retournée par l'imprimeur au moment du tirage.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX. — 27662-12-92

3e Année. N° 5. Février 1893.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

NOTE SUR LES PROPRIÉTÉS

DES FOYERS DIAMÉTRAUX DANS LES CONIQUES ASSOCIÉES

Par M. **L. Ripert.**

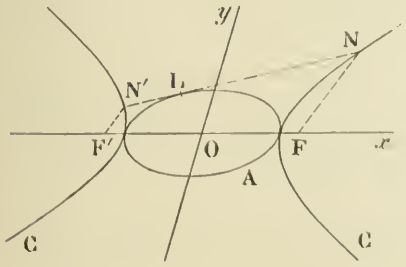
La podaire des foyers d'une conique A étant le cercle C décrit sur l'axe focal comme diamètre, les foyers F, F′ de A sont deux points fixes, situés sur le diamètre commun à A et C, que l'on obtient en menant à A une tangente quelconque, et, par les points d'intersection avec C, les perpendiculaires à cette tangente (c'est-à-dire ses conjuguées par rapport à C).

Nous nous proposons de démontrer que, si l'on remplace l'axe focal par un diamètre transverse quelconque et le cercle par une conique quelconque C ayant avec A des relations correspondantes, il existe, sur ce diamètre, deux points fixes F et F′ que l'on peut appeler *foyers diamétraux*, et pour lesquels on peut retrouver un grand nombre des propriétés connues des foyers.

Définition. — Nous appelons *conique* A (C) ou *conique* A *associée d'une conique* C, une conique A tangente à une conique C aux deux extrémités d'un diamètre. D'où il résulte que les coniques associées A et C ont un diamètre transverse entièrement commun et son conjugué (transverse ou non transverse) commun en direction seulement.

Théorème I. — *Étant donnée une conique* A(C), *si l'on mène à* A *une tangente quelconque, et, par les points d'intersection avec* C, *les conjuguées de cette tangente par rapport à* C, *chacune de ces droites passera par un point fixe* (F *ou* F′) *situé sur le diamètre transverse commun.*

Prenant pour axe des x le diamètre transverse commun, et, pour axe des y, son conjugué (commun en direction), les équations des coniques seront :



$$Ay^2 + Bx^2 - AB = 0 \quad (A), \qquad Ay^2 + Mx^2 - AM = 0 \quad (C)$$

Soit $\left(\alpha, \beta = \sqrt{\dfrac{B(A-\alpha^2)}{A}}\right)$ un point L de A; la tangente en L a pour équation

$$y = -\frac{\sqrt{B}.\alpha}{\sqrt{A(A-\alpha^2)}}x + \frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{A-\alpha^2}}.$$

Elle coupe C aux points N, N′ dont les coordonnées sont :

$$x = \frac{AB\alpha \pm (A-\alpha^2)\sqrt{AM(M-B)}}{B\alpha^2 + M(A-\alpha^2)}, \qquad y = \frac{\sqrt{A-\alpha^2}\,M\sqrt{AB} + \alpha\sqrt{BM(M-B)}}{B\alpha^2 + M(A-\alpha^2)}.$$

Les droites NF, N'F', conjuguées de NN' par rapport à C, ont pour équations

$$y - \frac{\sqrt{A - \alpha^2}\, M \sqrt{AB} \mp \alpha \sqrt{BM(M - B)}}{B\alpha^2 + M(A - \alpha^2)} = \frac{M\sqrt{A - \alpha^2}}{\sqrt{AB}.\alpha} \left[x - \frac{AB\alpha \pm (A - \alpha^2)\sqrt{AM(M - B)}}{B\alpha^2 + M(A - \alpha^2)} \right].$$

Cette équation est satisfaite, quel que soit α, par $\left(x = \pm \sqrt{\frac{A(M - B)}{M}},\quad y = 0\right)$; ce qui démontre l'existence, sur le diamètre commun Ox, des *foyers diamétraux* F, F', équidistants du centre.

Remarque. — Les foyers diamétraux de A(C) existent toujours quand les coniques associées sont d'espèces différentes (ellipse et hyperbole); ils ne sont réels pour des coniques de même espèce (deux ellipses ou deux hyperboles) que si A est intérieure à C; ce qui explique pourquoi il n'y a pas de foyers principaux correspondant au petit axe d'une ellipse.

Réciproquement, *Étant donnés deux points* F, F' *équidistants du centre et sur un diamètre transverse d'une conique* A, *on peut toujours associer à* A *une conique* C *pour laquelle* F *et* F' *seront les foyers diamétraux de* A(C).

En effet, soit $Ay^2 + Bx^2 - AB = 0$ l'équation de A rapportée au diamètre FF' et à son conjugué, et soient $x = \pm f$ les abscisses de F, F'. Celles des foyers diamétraux de $A(Ay^2 + Mx^2 - AM = 0)$ étant $x = \pm \sqrt{\frac{A(M - B)}{M}}$, ces points seront F et F' si l'on a $\frac{A(M - B)}{M} = f^2$, ou $M = \frac{AB}{A - f^2}$. Il faut donc associer à A : $(A - f^2)y^2 + Bx^2 - AB = 0$.

Ceci posé, on démontrerait de même, sans autre difficulté qu'un calcul plus ou moins laborieux, tous les théorèmes énumérés ci-après et beaucoup d'autres que l'on peut imaginer par analogie avec les propriétés connues des foyers. Cette démonstration est d'ailleurs inutile, car nous prouverons plus loin, géométriquement et en une seule fois, que tous ces théorèmes sont exacts, dès que l'exactitude existe pour les théorèmes connus dont leur énoncé est déduit et qui sont rappelés en regard.

Nous appelons *directrice diamétrale* correspondant au foyer diamétral F d'une conique A(C), la polaire de ce point par rapport à A. — Aux foyers diamétraux $\left(x = \pm \sqrt{\frac{A(M - B)}{M}},\quad y = 0\right)$ correspondent respectivement les directrices diamétrales : $x = \pm \sqrt{\frac{AM}{M - B}}$.

RAPPEL DES PROPRIÉTÉS DES FOYERS ET DIRECTRICES	PROPRIÉTÉS CORRESPONDANTES DES FOYERS ET DIRECTRICES DIAMÉTRAUX
(2) Si l'on mène la tangente en un point L d'une conique A, puis le rayon vecteur F'L, et, par l'autre foyer F, la perpendiculaire FM à la tangente, le lieu du point M d'intersection de F'L et FM est un cercle C' ayant F' pour centre et un diamètre double de l'axe focal.	**Théor. II.** — *Étant donnée une conique* A(C), *si l'on mène la tangente en un point* L *de* A, *puis le rayon vecteur* F'L, *et, par l'autre foyer diamétral* F, *la conjuguée* FM *de cette tangente par rapport à* C, *le lieu du point* M *d'intersection de* F'L *et* FM *est une conique* C' *ayant* F' *pour centre, un diamètre suivant* FF' *double du diamètre transverse commun,* SEMBLABLE A C ET SEMBLABLEMENT PLACÉE (*).

(*) Nous supprimerons dorénavant les mots imprimés en majuscules, étant entendu que toutes les coniques C, C^n ou C_n sont toujours semblables et semblablement placées.

(3) Le rayon vecteur FM, mené d'un foyer d'une conique A au point de concours M de deux tangentes dont les points de contact sont T et T′, est la bissectrice de l'angle TFT′ (ou de son supplément).

Théor. III. — *Le rayon vecteur* FM, *mené d'un foyer diamétral d'une conique* A(C) *au point de concours* M *de deux tangentes à* A *dont les points de contact sont* T *et* T′, *est la médiane du triangle formé par les rayons vecteurs* FT, FT′ (ou le prolongement de l'un d'eux), *et une conjuguée de* FM *par rapport a* C.

(4) Si, par les deux foyers d'une conique A, on fait passer un cercle C_1, coupant A en un certain point M et l'axe non focal en D et E, l'une des cordes MD, ME est la tangente et l'autre la normale en M.

Théor. IV. — *Si, par les deux foyers diamétraux d'une conique* A(C), *on fait passer une conique* C_1, *coupant* A *en* M *et le diamètre conjugué du diamètre transverse commun en* D *et* E, *l'une des cordes* MD, ME *est la tangente à* A *en* M, *et l'autre sa conjuguée par rapport à* C.

(5) Le diamètre conjugué d'une corde DE d'une conique A et la perpendiculaire abaissée sur cette corde d'un foyer se coupent sur la directrice correspondant à ce foyer.

Théor. V. — *Le diamètre conjugué d'une corde* DE *d'une conique* A *et la conjuguée de cette corde par rapport à* C *menée d'un foyer diamétral de* A(C) *se coupent sur la directrice diamétrale correspondant à ce foyer.*

(6) La polaire d'un point M de la directrice correspondant au foyer F passe par ce foyer et est perpendiculaire au rayon vecteur FM.

Théor. VI. — *La polaire par rapport à* A *d'un point* M *de la directrice correspondant au foyer diamétral* F *de* A(C) *passe par ce foyer et est conjuguée par rapport à* C *du rayon vecteur* FM.

(7) Le pied de la perpendiculaire abaissée du foyer d'une hyperbole sur une asymptote appartient à la directrice correspondant à ce foyer.

Théor. VII. — *Etant donnée une hyperbole* H(C), *le point de rencontre d'une asymptote de* H *avec sa conjuguée par rapport à* C *menée d'un foyer diamétral appartient à la directrice correspondante.*

Définition. — Deux *coniques diamétralement homofocales* A(C) et A′(C′) sont des coniques A et A associées de coniques semblables et semblablement placées C et C′ et ayant les mêmes foyers diamétraux F et F′.

On trouve facilement, pour les équations de ces coniques, $2f$ étant la distance des foyers diamétraux communs et le diamètre FF′ étant pris pour axe des x :

$$\left.\begin{aligned} &Ay^2 + \frac{M(A'-f^2)}{A}x^2 - M(A-f^2) = 0 \\ &Ay^2 + Mx^2 - AM = 0 \end{aligned}\right\} \quad A(C)$$

$$\left.\begin{aligned} &A'y^2 + \frac{M(A'-f^2)}{A}x^2 - \frac{A'M(A'-f^2)}{A} = 0 \\ &Ay^2 + Mx^2 - A'M = 0 \end{aligned}\right\} \quad A'(C')$$

PROPRIÉTÉS DES CONIQUES HOMOFOCALES

(8) Deux coniques homofocales se coupent orthogonalement, en des points réels ou imaginaires.

PROPRIÉTÉS CORRESPONDANTES DES CONIQUES DIAMÉTRALEMENT HOMOFOCALES

Théor. VIII. — *Deux coniques diamétralement homofocales* A(C) *et* A′(C′) *se coupent, en des points réels ou imaginaires, sous des angles conjugués par rapport à* C.

(9) La tangente MT en un point M d'une conique A est la bissectrice de l'angle formé par les tangentes menées de ce point à une conique homofocale A′ (ou de son supplément).

Théor. IX. — *La tangente* MT *en un point* M *d'une conique* A(C) *est la médiane du triangle formé par les tangentes menées de ce point à une conique diamétralement homofocale* A′(C′) (ou le prolongement de l'une d'elles) *et une conjuguée de* MT *par rapport à* C.

(10) Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à deux coniques homofocales est un cercle concentrique.

Théor. X. — *Le lieu des sommets des angles conjugués par rapport à* C *et circonscrits à deux coniques diamétralement homofocales* A(C) *et* A′(C′) *est une conique* C″, *concentrique.*

(11) Le lieu des pôles d'une droite donnée par rapport à toutes les coniques homofocales est une droite perpendiculaire.

Théor. XI. — *Le lieu des pôles d'une droite donnée par rapport à toutes les coniques diamétralement homofocales* $A^n(C^n)$ *est une droite conjuguée par rapport à* C.

(12) On obtient un lieu unique du troisième degré en cherchant : 1° le lieu des points de contact des tangentes menées à toutes les coniques homofocales d'un point donné P ; 2° le lieu des pieds des normales menées de ce point à ces coniques ; 3° le lieu des projections du point P sur ses polaires (Conc. Gén., 1840).

Théor. XII. — *On obtient un lieu unique du troisième degré en cherchant : 1° le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point* P *à toutes les coniques diamétralement homofocales* $A^n(C^n)$; *2° le lieu des pieds des droites, issues de* P *et qui coupent ces coniques sous un angle conjugué par rapport à* C ; *3° le lieu des points de rencontre des polaires de* P *par rapport à* A *et de leurs conjuguées par rapport à* C *passant par* P.

(13) Si, par un point P donné sur une conique A, on fait passer un cercle C_1 de rayon quelconque tangent à A en P, le lieu du point de rencontre des tangentes communes à A et C_1 est la conique A′ passant par P et homofocale à A (Conc. Gén., 1844) (*).

Théor. XIII. — *Si, par un point* P *donné sur une conique* A, *on fait passer une conique* C_1 *tangente à* A *en* P *et toujours semblable à elle-même, le lieu du point de rencontre des tangentes communes à* A *et* C_1 *est la conique* A′(C′) *passant par* P *et diamétralement homofocale à* A(C).

(14) Les polaires, par rapport à une conique A, des points du cercle concentrique C_s (lieu des sommets des angles droits circonscrits à A) enveloppent une ellipse homofocale A′ (Conc. Gén., 1846).

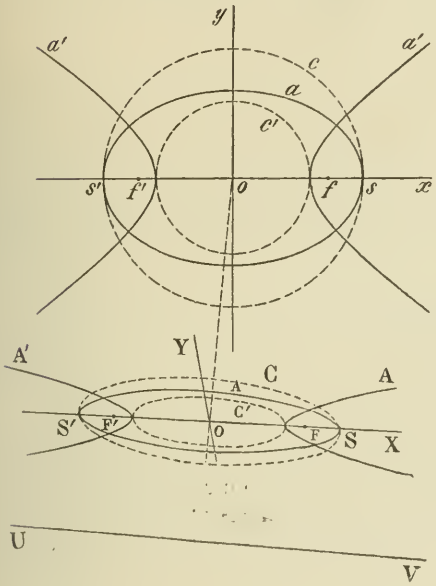
Théor. XIV. — *Les polaires, par rapport à une conique* A, *des points de la conique concentrique* C_s (lieu des sommets des angles circonscrits à A et conjugués par rapport à une conique donnée C_0) *enveloppent une conique* A′(C′) *diamétralement homofocale à* A(C) *et de même espèce que* C_0.

Nota. — Les théorèmes 14 et XIV sont des cas particuliers du suivant (**XIV**^{bis}) : *l'enveloppe des polaires des points d'une conique* C *par rapport à une conique* A *est une conique* B, *qui est une ellipse, une parabole, ou une hyperbole selon que le centre de* A *est à l'intérieur, sur le périmètre ou à l'extérieur de* C.

Démonstration. — Il s'agit de prouver maintenant que les théorèmes I à XIV et tous théorèmes du même genre sont vrais dès que les théorèmes correspondants 1 à 14 le sont.

(*) Voir la *Revue de Mathématiques spéciales*, 2e année, n° 11, p. 358.

Soit une conique $a(c)$, ou $a'(c')$, associée de son cercle principal et dont les foyers sont f et f'. Projetons-en homographiquement tous les points sur une droite quelconque UV en réduisant (ou augmentant) toutes les ordonnées dans un rapport quelconque mais constant k. Les coniques $a(c)$, $a'(c')$ deviennent les coniques A(C), A′(C′) associées aux ellipses C, C′ comme les premières étaient associées aux cercles c, c'. Les foyers f, f' donnent des points F, F′ qui ne sont plus foyers des coniques A, A′, mais qui sont des points fixes situés sur le diamètre transverse SS′ correspondant de l'axe ss'. Les diamètres rectangulaires de c, c' donnent les diamètres conjugués de C, C′, ellipses semblables et semblablement placées comme toutes autres ellipses qui proviendraient de cercles de la figure primitive; les coniques homofocales deviennent donc diamétralement homofocales et associées à des ellipses concentriques et semblables. Toutes les droites primitivement rectangulaires deviennent conjuguées par rapport à C, C′, ... Les points en ligne droite demeurent en ligne droite, et le rapport de leurs distances n'est pas changé; les tangentes, enveloppes, polaires, etc., restent tangentes, enveloppes, polaires, etc., dans des conditions correspondantes; la bissectrice de l'angle au sommet d'un triangle isocèle devient la médiane du triangle correspondant, etc. D'ailleurs, les coniques a ou a', la droite UV, le rapport k et l'inclinaison des droites projetantes étant quelconques, A ou A′ est une conique quelconque associée d'une ellipse C ou C′ quelconque. En sorte que, tout théorème qui ne concerne que des propriétés du genre de celles rappelées ci-dessus est démontré pour A (C, ellipse) lorsqu'il l'est pour a (c, cercle); il est par suite démontré pour A (C, parabole), car la parabole n'est qu'une ellipse-limite. Nous disons de plus qu'il s'applique toujours dès lors à A (C, hyperbole).

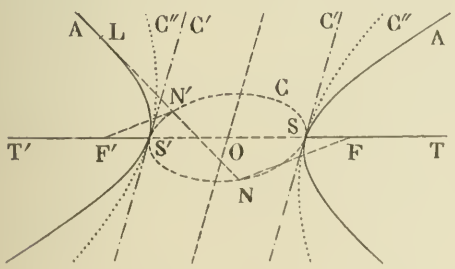


Prenons un exemple. — Il est dorénavant démontré que, A étant une conique quelconque,

$$\left(\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1\right),$$

et C une *ellipse* associée quelconque

$$\left(\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda} = 1\right),$$



les conjuguées par rapport à C d'une tangente quelconque à A menées de ses points de rencontre avec C passent par les points fixes F, F′. Laissant fixe la conique A (hyperbole, par exemple), faisons varier λ de 0 à $+\infty$. Il est facile de voir que F, F′ sont à l'infini pour $\lambda = 0$, et en S, S′ pour $\lambda = +\infty$. Donc, le lieu des points F, F′ pour toutes les coniques C ellipses (pour lesquelles le théorème est démontré) se compose des segments ST, S′T′ du diamètre commun, les points S, S′ correspondant à la variété de parabole $C'(x^2 - A = 0)$. Or, la droite SS′ ne peut présenter en S et S′ deux brusques points d'arrêt; la parabole C′ est d'ailleurs la conique de transition entre C ellipse et C″ hyperbole. Dès lors, le segment SS′ du diamètre commun ne peut être que le lieu des points fixes F, F′ pour les coniques C hyperboles correspondant à des valeurs négatives de λ (en partant de $\lambda = -\infty$, valeur qui correspond également à la parabole C′).

Un raisonnement analogue est applicable à tous les théorèmes du même genre. Il peut se résumer

comme il suit : *Tout théorème, démontré pour un cercle* C, *dans ses relations* de position *avec des droites ou coniques quelconques, est, par le fait, démontré pour une ellipse* E *et par suite pour une parabole* P; *il s'étend dès lors à une hyperbole* H *et est vrai par conséquent pour une conique quelconque.*

A titre de vérification analytique des considérations précédentes, démontrons le théorème XIV, qui est un cas particulier du théorème XIV *bis*.

Théorème XIV bis. — *L'enveloppe des polaires des points d'une conique* C *par rapport à une conique* A *est une conique* B *qui est ellipse, parabole ou hyperbole selon que le centre de* A *est à l'intérieur, sur le périmètre ou à l'extérieur de* C.

Prenons pour axes de coordonnées deux diamètres conjugués de C. Soit

$$Mx^2 + Ny^2 - MN = 0,$$

son équation et

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

l'équation de A.

La polaire par rapport à A d'un point $\left(\alpha, \beta = \pm\sqrt{\frac{M(N - \alpha^2)}{N}}\right)$ de C a pour équation

$$(Ax + By + D)\alpha \pm (Bx + Cy + E)\sqrt{\frac{M(N - \alpha^2)}{N}} + Dx + Ey + F = 0.$$

équation qui, rendue rationnelle, devient

$$\varphi(\alpha) = [N(Ax + By + D)^2 + M(Bx + Cy + E)^2]\alpha^2 + 2N(Ax + By + D)(Dx + Ey + F)\alpha$$
$$+ N[(Dx + Ey + F)^2 - M(Bx + Cy + E)^2] = 0,$$

d'où $$\frac{1}{2}\varphi'_\alpha = [N(Ax + By + D)^2 + M(Bx + Cy + E)^2]\alpha + N(Ax + By + D)(Dx + Ey + F).$$

En éliminant α entre $\varphi = 0$ et $\varphi' = 0$ et supprimant un facteur commun, on obtient pour équation de l'enveloppe cherchée

$$N(Ax + By + D)^2 + M(Bx + Cy + E)^2 - (Dx + Ey + F)^2 = 0 \qquad (B)$$

ou $$(NA^2 + MB^2 - D^2)x^2 + 2(NAB + MBC - DE)xy + (NB^2 + MC^2 - E^2)y^2 + \ldots = 0.$$

Cette conique B sera ellipse, parabole ou hyperbole selon que l'on aura

$$(NAB + MBC - DE)^2 - (NA^2 + MB^2 - D^2)(NB^2 + MC^2 - E^2) \lessgtr 0,$$

ou $$M\left(\frac{CD - BE}{B^2 - AC}\right)^2 + N\left(\frac{AE - BD}{B^2 - AC}\right)^2 - MN \lessgtr 0,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Cas particulier (théorème XIV). — Si la conique A a pour équation $Ay^2 + Bx^2 - AB = 0$, et que la conique C (ou C_s) soit le lieu des sommets des angles circonscrits à A et conjugués par rapport à une conique donnée C_0 ($Mx^2 + Ny^2 + \ldots = 0$), on trouve facilement pour l'équation de C_s

$$Mx^2 + Ny^2 - (AM + BN) = 0,$$

et dès lors l'équation de la conique-enveloppe B(ou A') est (en faisant les changements de lettres convenables dans l'équation B) :

$$A^2My^2 + B^2Nx^2 - \frac{A^2B^2MN}{AM + BN} = 0.$$

Cette conique est toujours de même espèce que C_0.

En associant les coniques A et A′ à des coniques C et C′ semblables à C_0. les équations peuvent s'écrire :

$$\left.\begin{aligned} Ay^2 + Bx^2 - AB &= 0 \\ Ay^2 + \frac{AM}{N}x^2 - \frac{A^2M}{N} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad A(C)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{A^2M}{AM + BN}y^2 + \frac{B^2N}{AM + BN}x^2 - \frac{A^2B^2MN}{(AM + BN)^2} &= 0 \\ \frac{A^2M}{AM + BN}y^2 + \frac{A^2M^2}{N(AM + BN)} - \frac{A^4M^3}{N(AM + BN)^2} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad A'(C')$$

Pour l'une comme pour l'autre de ces coniques associées, on trouve $f = \sqrt{\frac{AM - BN}{M}}$; elles sont donc diamétralement homofocales. C. Q. F. D.

Remarque. — On a admis ci-dessus que les diamètres conjugués choisis pour axes sont communs aux coniques concentriques A et C_s, ce qui est nécessaire pour que l'on puisse former la conique A(C). Mais, d'ailleurs, il est facile de démontrer que *deux coniques quelconques ont, en général, un système de directions conjuguées commun.* Ce système est toujours réel quand les deux coniques sont deux ellipses ou une ellipse et une hyperbole; il peut être imaginaire quand il s'agit de deux hyperboles.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

154. — *Trouver l'enveloppe des axes des coniques tangentes à deux droites données en des points donnés. Étant donnée une tangente à l'enveloppe, reconnaître le genre de la conique dont elle est un axe.*

Ox et Oy étant les deux droites données, $A(a, 0)$ et $B(0, b)$ étant les deux points donnés, les équations tangentielles des points O, A, B sont respectivement

$$w = 0, \qquad au + w = 0, \qquad bv + w = 0;$$

par conséquent, l'équation tangentielle générale des coniques tangentes aux axes aux points A et B sera

$$f(u, v, w) = (au + w)(bv + w) + \lambda w^2 = 0. \qquad (1)$$

Pour qu'une droite (u, v, w) soit un axe de cette conique, il faut que le pôle de cette droite soit à l'infini dans la direction perpendiculaire. Or ce pôle a pour coordonnées homogènes f'_u, f'_v, f'_w : la droite qui joint l'origine à ce point a pour coefficient angulaire $\frac{f'_v}{f'_u}$, on aura donc pour déterminer les axes de la conique (1) les deux équations

$$f'_w = 0, \qquad (2)$$

$$1 - \frac{u}{v}\cdot\frac{f'_v}{f'_u} + \left(\frac{f'_v}{f'_u} - \frac{u}{v}\right)\cos\theta = 0$$

θ désignant l'angle xOy.

En éliminant λ entre ces deux équations, on aura l'équation tangentielle de l'enveloppe demandée.

La deuxième équation peut s'écrire

$$f'_v(u - v\cos\theta) - f'_u(v - u\cos\theta) = 0.$$

ou

$$b(au + w)(u - v\cos\theta) - a(bv + w)(v - u\cos\theta) = 0. \qquad (3)$$

Cette équation ne renfermant pas le paramètre λ est l'équation de l'enveloppe.

On voit qu'elle représente une conique inscrite dans un quadrilatère dont les sommets consécutifs sont les points qui ont pour équations tangentielles respectivement

$$au + w = 0, \qquad bv + w = 0, \qquad u - v\cos\theta = 0, \qquad v - u\cos\theta = 0;$$

c'est-à-dire les points A, B et les points à l'infini dans les directions perpendiculaires à Ox et Oy. L'un des côtés du quadrilatère étant la droite de l'infini, l'enveloppe est une parabole tangente à la droite AB, à la droite AP perpendiculaire à Ox et à la droite BQ perpendiculaire à Oy.

L'équation (3) peut encore s'écrire

$$ab(u^2 - v^2) + uw(b + a\cos\theta) - vw(a + b\cos\theta) = 0.$$

Sous cette forme on reconnaît que la direction de l'axe a pour paramètres directeurs $b + a\cos\theta$ et $-(a + b\cos\theta)$, c'est-à-dire que l'axe est perpendiculaire à la droite joignant le point O au milieu I de AB. On voit en outre que les coordonnées des tangentes issues du point O à cette parabole satisfont à la relation

$$u^2 - v^2 = 0,$$

c'est-à-dire que ces tangentes sont les bissectrices des axes de coordonnées. Le point O est donc sur la directrice, qui se trouve être ainsi la droite OI puisque cette droite est perpendiculaire à l'axe.

En résumé, l'enveloppe demandée est une parabole qui a pour directrice la droite OI, qui est tangente aux droites AB, AP, BQ et aux bissectrices de l'angle xOy. On aura aisément le foyer en prenant les symétriques de la directrice par rapport à deux des tangentes.

On pouvait reconnaître plus rapidement que la droite OI était la directrice, en observant que cette droite est le lieu des centres des coniques (1) et que de chaque point de cette droite on peut mener deux tangentes rectangulaires à la parabole, qui sont les deux axes de la conique dont le point considéré est le centre.

Cherchons maintenant, étant donnée une tangente à l'enveloppe (u', v', w'), quel est le genre de la conique dont elle est un axe.

L'équation tangentielle des points de rencontre de la conique (1) avec la droite de l'infini est

$$(f'_w)^2 - 4f(0, 0, 1)f(u, v, w) = 0,$$

c'est-à-dire

$$a^2u^2 - 2(1 + 2\lambda)abuv + b^2v^2 = 0.$$

Cette équation donne les coefficients directeurs des directions asymptotiques. Pour que ces directions soient réelles, il faut qu'on ait

$$(2\lambda + 1)^2 - 1 > 0$$

ou

$$\lambda(\lambda + 1) > 0. \tag{4}$$

Telle est la condition pour que l'équation (1) représente une hyperbole. Si $\lambda(\lambda + 1) < 0$, l'équation représente une ellipse; enfin, soit $\lambda(\lambda + 1) = 0$; ou bien $\lambda = 0$: la conique se réduit aux deux points A et B; ou bien $\lambda + 1 = 0$ et l'équation (1) représente une parabole, la seule du faisceau.

Cela posé, soient u', v', w' les coordonnées d'une tangente T à l'enveloppe. On a la conique dont cette droite est un axe en écrivant que u', v', w' satisfont à l'équation (2). On a ainsi

$$au' + bv' + 2(1 + \lambda)w' = 0.$$

On en déduit la valeur de λ correspondante, et en remplaçant dans la condition (4) on obtient

$$(au' + bv' + 2w')(au' + bv') > 0. \tag{5}$$

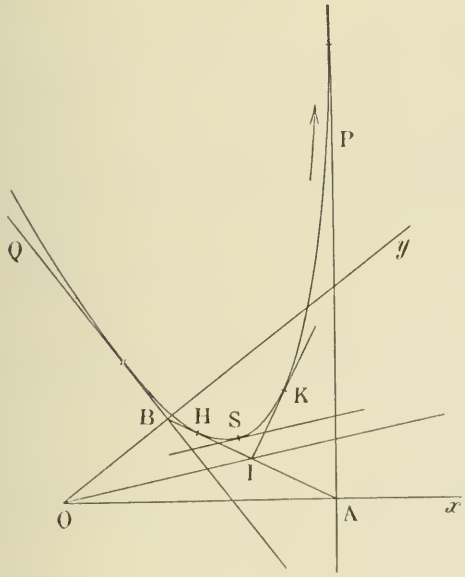
Il s'agit d'interpréter géométriquement cette condition. En égalant à zéro successivement les deux facteurs qui figurent dans le premier membre, on obtient des conditions qui expriment que la droite T passe par le point I et par le point à l'infini de la droite OI. Le signe du premier membre dépendra

donc de la position de la droite par rapport à ces deux points, c'est-à-dire de la position du point de rencontre C de la droite T et de la droite OI.

Ce point C a pour abscisse $-\dfrac{aw'}{au' + bv'}$, le point I a pour abscisse $\dfrac{a}{2}$, la différence est

$$\frac{a}{2} + \frac{aw'}{au' + bv'} = \frac{(au' + bv' + 2w')a}{au' + bv'};$$

et cette différence a le même signe que le premier membre de l'inégalité (5), en supposant $a > 0$.



Donc, dans le cas de notre figure, si le point C est à droite du point I, la droite T est axe d'une ellipse; si le point C est à gauche de I, T est axe d'une hyperbole; quand le point C est en I, il y a deux droites T correspondantes passant par ce point, la droite AB d'une part et la perpendiculaire au point I; ces deux droites sont les axes de la conique formée par les deux points A et B. Enfin, si la droite T est parallèle à AB, elle est axe de la parabole du faisceau (1).

Soient H, K, S les points de contact de l'enveloppe avec la droite AB, la tangente perpendiculaire passant par le point I et la tangente parallèle à OI (qui est la tangente au sommet de l'enveloppe).

Toute tangente à la parabole dont le point de contact se trouve entre H et S ou sur la branche infinie partant du point K dans le sens de la flèche, est axe d'une ellipse; si le point de contact se trouve entre S et K et sur la branche infinie partant de H, la tangente est axe d'une hyperbole. La tangente en S est axe de la parabole du faisceau (1) et les tangentes en H et K sont les axes de la conique singulière formée par les deux points A et B.

Ont résolu cette question : MM. Auzeram (lycée Louis-le-Grand) et H. Chéronnet (collège Chaptal).

---

155. — *On considère toutes les coniques* (C) *tangentes à une droite en un point donné et ayant pour foyer un point donné.*

1° Par un point du plan il passe deux de ces coniques; reconnaître leur genre.

2° Lieu des sommets de l'axe focal. Étant donné un point du lieu, reconnaître le genre de la conique dont il est un sommet.

1° Je prends pour axe des x la tangente donnée et pour axe des y une perpendiculaire passant par le point de contact.

Soient a, b les coordonnées du foyer donné F; l'équation générale des coniques (C) sera de la forme

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - (lx + my + h)^2 = 0. \qquad (1)$$

avec les conditions

$$h^2 = a^2 + b^2,$$

$$a + lh = 0,$$

qui expriment que la conique est tangente à l'origine à l'axe des x. Ces conditions permettent de

considérer h comme constant, ainsi que l; on pourra supposer par exemple

$$h = +\sqrt{a^2 + b^2}, \qquad l = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \tag{2}$$

car on peut choisir arbitrairement le signe d'une des trois quantités l, m ou h.

L'équation (1) ne renferme donc que le seul paramètre m, et comme ce paramètre figure au second degré, on en conclut que par tout point (x, y) du plan il passe deux des coniques (C). Les valeurs de m correspondantes sont racines de l'équation (1) et par suite sont toujours réelles, car on peut résoudre l'équation en écrivant

$$lx + my + h = \pm\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2},$$

et la quantité sous le radical est toujours positive.

On en conclut que les deux coniques qui passent par un point quelconque du plan sont réelles puisqu'elles admettent un foyer réel et une directrice réelle.

Cherchons maintenant quel est leur genre. Le discriminant des termes du second degré dans l'équation (1) est

$$\delta = 1 - l^2 - m^2.$$

ou, en tenant compte de la valeur de l,

$$\delta = \frac{b^2}{h^2} - m^2.$$

Il nous faut trouver le signe de δ pour les racines m' et m'' de l'équation (1), c'est-à-dire le signe des expressions

$$\delta' = \frac{b^2}{h^2} - m'^2, \qquad \delta'' = \frac{b^2}{h^2} - m''^2,$$

et pour cela nous comparerons les nombres $\pm\frac{b}{h}$ aux racines de l'équation (1). En désignant par (m) le premier membre de cette équation, on a

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{b}{h}\right) &= (x - a)^2 + (y - b)^2 - \left(lx - \frac{b}{h}y + h\right)^2 \\ &= (x - a)^2 + (y - b)^2 - \frac{1}{h^2}\left[-ax - by + a^2 + b^2\right]^2 \\ &= (x - a)^2 + (y - b)^2 - \frac{1}{a^2 + b^2}\left[a(x - a) + b(y - b)\right]^2 \\ &= \frac{\left[b(x - a) - a(y - b)\right]^2}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{(bx - ay)^2}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Donc $f\left(-\frac{b}{h}\right)$ est toujours positif, par conséquent $-\frac{b}{h}$ est compris entre les racines m' et m''; comme on peut toujours supposer $b > 0$, on voit que la plus petite racine m' est inférieure à la fois aux deux valeurs $+\frac{b}{h}$ et $-\frac{b}{h}$; par suite $\delta' < 0$, et la conique correspondante est une hyperbole. Dans le cas particulier où le point (x, y) est sur la droite OF, on a $bx - ay = 0$, $m' = -\frac{b}{h}$ et la conique correspondante se réduit à la droite double OF.

On a en outre

$$\begin{aligned} f\left(\frac{b}{h}\right) &= (x - a)^2 + (y - b)^2 - \left(lx + \frac{b}{h}y + h\right)^2 \\ &= (x - a)^2 + (y - b)^2 - \frac{1}{h^2}(-ax + by + a^2 + b^2)^2. \end{aligned}$$

En égalant le deuxième membre à zéro, on a l'équation de la parabole P, qui fait partie des coniques (C).

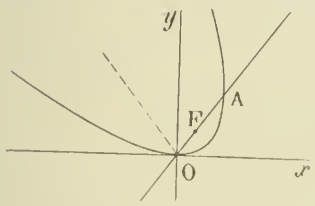
Si le point (x, y) est en dehors de cette parabole, $f\left(\frac{b}{h}\right) > 0$, $\frac{b}{h}$ est compris entre m' et m'', $\delta'' < 0$, la conique correspondante à m'' est une hyperbole.

Si le point (x, y) est à l'intérieur de la parabole, $f\left(\frac{b}{h}\right) < 0$, $\frac{b}{h}$ est supérieur à m'', $\delta'' > 0$ et la conique correspondante est une ellipse.

Enfin si le point (x, y) est sur la parabole, $m'' = \frac{b}{h}$, et la conique correspondante est la parabole P elle-même.

En résumé, par un point quelconque M du plan il passe deux des coniques (C). Si le point M est à l'extérieur de la parabole P, les deux coniques sont deux hyperboles, sauf si le point M est sur la droite OF ; dans ce cas l'une des hyperboles se transforme en la droite double OF. Si le point M est à l'intérieur de la parabole, il passe par ce point une ellipse et une hyperbole, l'hyperbole se réduisant à la droite double OF si le point M est sur OF. Enfin si le point M est sur la parabole, les deux coniques qui passent par ce point se composent d'abord de la parabole P elle-même et ensuite d'une hyperbole qui se réduit à la droite double OF dans le cas où le point M est sur OF, c'est-à-dire au point A.

2° Les sommets de l'axe focal sont à l'intersection de la courbe représentée par l'équation (1) et de la perpendiculaire abaissée du foyer sur la directrice ; cette perpendiculaire a pour équation



$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m}. \tag{3}$$

En éliminant m entre les équations (1) et (3) on a l'équation du lieu, l et h étant toujours des constantes déterminées par les relations (2).

On tire m de l'équation (3) et en remplaçant dans (1) on obtient

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - \frac{1}{(x-a)^2}\,[lx\,(x-a) + ly(y-b) + h(x-a)]^2.$$

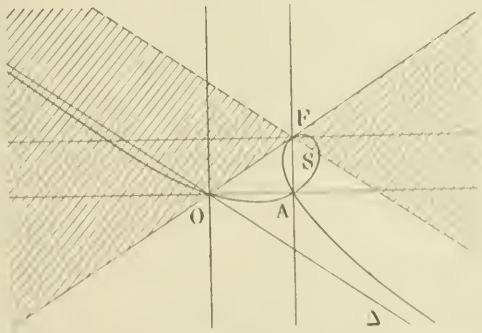
Transportons l'origine des coordonnées au foyer F, et remplaçons l par sa valeur $-\frac{a}{h}$; il vient

$$h^2x^2(x^2+y^2) - [-ax(x+a) - ay(y+b) + h^2x]^2 = 0$$

ou

$$(a^2+b^2)x^2(x^2+y^2) - [a(x^2+y^2) - b(bx-ay)]^2 = 0.$$

En effectuant, on aperçoit le facteur $bx - ay$, qui correspond à la conique singulière formée par la droite double OF, et en supprimant ce facteur il reste



$$(x^2+y^2)(bx+ay) + 2ab(x^2+y^2) - b^2(bx-ay) = 0.$$

Cette équation représente une cubique circulaire qui passe par le point F et qui admet pour tangente en ce point la droite OF. De plus, en écrivant son équation sous la forme

$$(x^2+y^2)(bx+ay+2ab) - b^2(bx-ay) = 0,$$

on reconnaît que son asymptote a pour équation

$$bx + ay + 2ab = 0;$$

cette droite passe par le point O et fait avec les axes les mêmes angles que OF.

Les deux droites OF et Δ forment quatre angles et, dans deux de ces angles, il n'y a aucun point de la courbe.

On peut construire la courbe en posant $y = tx$; on reconnaît que le point A projection du point F sur la tangente donnée est un point double; il est alors naturel de transporter l'origine en ce point, qui a pour coordonnées a et $-b$ dans notre nouveau système. On obtient l'équation

$$(x^2 + y^2)(bx + ay) + ab(x^2 - y^2) - 2b^2xy = 0.$$

Les tangentes au point A sont rectangulaires, la courbe est une strophoïde oblique qui se construit aisément.

Soit M un point de cette courbe; cherchons le genre de la conique dont il est un sommet.

Il faut connaître le signe de la quantité δ donnée par

$$\delta = \frac{b^2}{h^2} - m^2.$$

Mais m est lié aux coordonnées du point M par la relation (3), d'où l'on tire

$$m = \frac{l(y - b)}{x - a}.$$

En remplaçant, on a $\delta = \dfrac{b^2}{h^2} - \dfrac{l^2(y - b)^2}{(x - a)^2} = \dfrac{b^2(x - a)^2 - a^2(y - b)^2}{h^2(x - a)^2}$.

Ou en supposant la courbe rapportée aux axes d'origine F,

$$\delta = \frac{b^2x^2 - a^2y^2}{h^2x^2}.$$

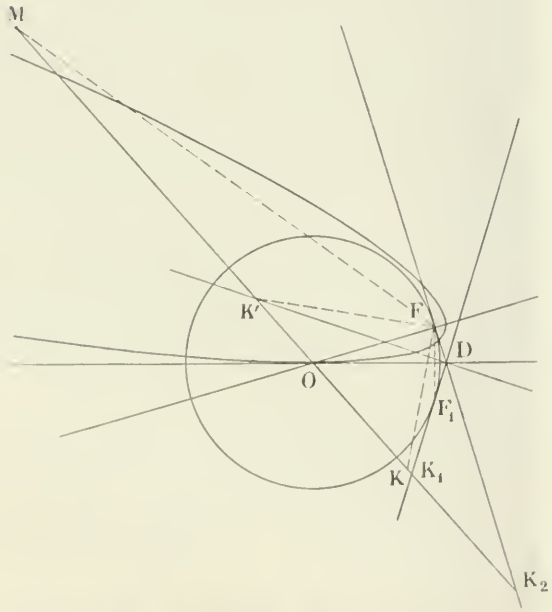
Couvrons de hachures la portion du plan pour laquelle $b^2x^2 - a^2y^2$ est positif; les points de la strophoïde qui sont dans cette région du plan sont sommets d'ellipses, les autres sont sommets d'hyperboles. Le point S, intersection de la strophoïde et de la droite $bx + ay = 0$, est le sommet de l'unique parabole de la série. AUZERAM.

Autre solution par M. L. BOÉ, à Tarbes.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Menons FD perpendiculaire à OF. Les directrices des coniques (C) passent par le point D.

Soit M un point quelconque du plan; si ce point appartient à une conique (C), la directrice de cette conique passera par l'un des points K ou K′, où les bissectrices extérieure et intérieure de l'angle MFO rencontrent la droite OM.



La directrice de cette conique sera donc la droite K′D ou la droite KD.

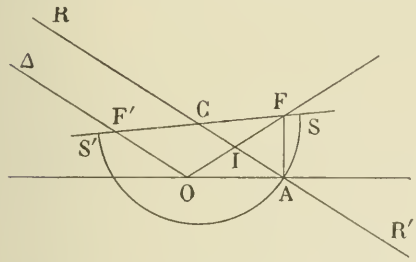
Il en résulte qu'il existe deux coniques passant par le point M, dont l'une, celle qui a pour directrice K′D, est une hyperbole.

Il nous reste à déterminer le genre de celle qui a pour directrice KD. Si la distance du point O à la droite KD est supérieure à OF, la conique correspondante est une ellipse; c'est une hyperbole dans le cas contraire. Menons du point D une tangente au cercle qui a pour centre le point O et pour rayon OF; on a une droite DF_1 qui est la directrice de la parabole P qui fait partie des coniques (C). On voit alors que si la droite KD se trouve dans l'angle des deux droites FD et F_1D qui ne contient pas la tangente OD, la conique correspondante est une ellipse; cela revient à dire, en désignant par K_1 et K_2 les points où la droite OM

rencontre DF_1 et DF : si le point K est entre K_1 et K_2, la conique est une ellipse; si le point K est en dehors de K_1K_2, la conique est une hyperbole; enfin si le point K tombe en K_1, la conique se confond avec la parabole P.

Or, soit M_1 le point où la droite OM rencontre la parabole P; quand le point M se déplace sur la droite OM, on suit aisément le mouvement du point K et on constate que lorsque M se déplace entre O et M_1, le point K se déplace entre K_1 et K_2, et quand M est en dehors du segment OM_1, K est en dehors du segment K_1K_2. Par conséquent, ceci revient à dire que si le point M est à l'intérieur de la parabole P, la conique qui a pour directrice KD est une ellipse; si le point M est à l'extérieur, la conique est une hyperbole; et comme la conique qui a pour directrice K'D est toujours une hyperbole, on est conduit, comme on le voit, aux mêmes conclusions que dans la précédente solution.

On voit aussi que quand le point M est sur la droite OF, il ne passe qu'une véritable conique par ce point : c'est une ellipse si le point est à l'intérieur de la parabole, une hyperbole dans le cas contraire.



2° La droite OΔ, symétrique de OF par rapport à la tangente, est le lieu géométrique du deuxième foyer; la droite menée par le milieu I de OF, parallèlement à OΔ, est le lieu du centre; cette droite passe par le point A, projection de F sur la tangente. Soit donc une droite quelconque FF', axe focal d'une des coniques; CA est la demi-longueur de l'axe, donc on aura les sommets en portant sur CF, à partir de C, des longueurs CS et CS' égales à CA. On voit ainsi que le lieu de ces points est une strophoïde oblique dont A est le point double et OΔ l'asymptote. Elle est construite dans une figure précédente.

La portion de droite IR est le lieu des centres d'ellipses, puisque les deux foyers sont d'un même côté de la tangente; il en résulte que les sommets des ellipses seront situés sur la portion de la courbe tracée plus haut, qui se trouve dans la région ombrée; les sommets des hyperboles sont dans les autres régions.

A. Audoin, lycée de Bordeaux.

M. H. Chéronnet a aussi donné une solution géométrique.

CONCOURS DE 1892 *(Suite)*.

CERTIFICAT D'APTITUDE A L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL

PREMIÈRE SESSION

Arithmétique et géométrie.

1. — Une personne verse dans une banque pendant n années de suite, au commencement de chaque année, des sommes respectivement égales aux termes consécutifs d'une progression arithmétique croissante commençant par a et ayant pour raison h. A la fin de la n^e année, la somme due par la banque à cette personne est le double de ce qu'elle serait si tous les versements avaient été égaux entre eux et chacun d'eux égal à a.

1° En tenant compte des intérêts simples au taux r par franc par an, calculer h en fonction de a, n et r.
Application numérique : $a = 1000$, $r = 0{,}04$, $n = 20$.

2° Même question et même application numérique en tenant compte des intérêts composés au taux r par franc par an, les intérêts se capitalisant tous les ans.

II. — Exposer comment, au moyen de la dérivée, on étudie les variations d'une fonction explicite d'une seule variable.

243. — *Application.* Dans un plan P, on donne un point A et un cercle de centre O et de rayon r. Un point S de l'espace se projette orthogonalement sur le plan P en un point B situé au milieu de OA ; on donne $SB = h$ et $AO = a$ Par le point A on trace dans le plan P une sécante AMN qui rencontre le cercle O aux points M et N que l'on joint au point S. Le triangle SMN, en tournant autour de MN comme charnière, engendre un volume V.

Etudier les variations de ce volume V lorsque la sécante AMN tourne dans le plan P autour du point A.

Donner un tableau récapitulatif de ces variations.

Géométrie et mécanique.

244. — Un cône a pour trace sur le plan horizontal de projection une ellipse E; ce cône est circonscrit à une sphère O qui est en outre tangente au plan horizontal de projection et au-dessus de ce plan. On donne l'ellipse E en grandeur et position, ainsi que la cote h du sommet du cône au-dessus du plan horizontal de projection.

1° Construire les projections horizontale et verticale du sommet S du cône et celles de la sphère O.

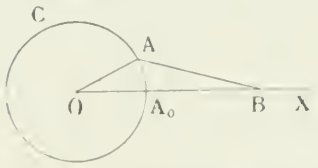
2° Construire les projections horizontale et verticale de la ligne L de contact du cône et de la sphère.

3° Trouver sur cette ligne L un point tel que la tangente en ce point à cette ligne fasse avec le plan horizontal un angle donné α.

Données numériques : $h = 64^{mm}$; $\alpha = 22^{\circ}\frac{1}{2}$; l'ellipse E a un grand axe de 120^{mm} de longueur et une distance focale de 72^{mm} ; la direction du grand axe fait un angle de 45° avec la ligne de terre, l'ouverture de cet angle étant dirigée en avant de la ligne de terre et vers la droite de la feuille; le prolongement du grand axe rencontre la ligne de terre en un point situé à 35^{mm} à gauche du milieu de celle-ci; le centre de l'ellipse E est à 70^{mm} de la ligne de terre et en avant de cette ligne.

Nota. — Joindre à l'épure une légende explicative.

245. — Dans un plan on donne un cercle O de rayon r et une droite indéfinie OX passant par son centre.



L'extrémité A d'une droite AB de longueur invariable se meut sur la circonférence O d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire ω, pendant que l'extrémité B se déplace sur OX. ($AB = a$; $a > r$.)

1° Trouver les formules permettant de calculer la vitesse du point B à un instant donné et pour une position donnée du point A. (On prendra pour origine des temps l'instant où le point A est en A_0.)

2° Trouver l'équation dont la résolution ferait connaître la position A_1 occupée par le point A lorsque la vitesse du point B est maximum.

Discuter cette équation.

En appelant A_2 la position du point A pour laquelle la droite AB est tangente au cercle O, dire les positions respectives des points A_1 et A_2.

3° Résoudre l'équation précédente, et placer le point A_1 sur la circonférence O, en supposant $a = 2r$.

DEUXIÈME SESSION

Arithmétique et algèbre.

I. — Trouver deux nombres, connaissant leur plus petit multiple commun a et la somme b de leurs carrés.

Application numérique : $a = 120$; $b = 5200$.

II. — Énoncer et démontrer le théorème de Rolle.

Appliquer ce théorème à la détermination de la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$x^3 + px + q = 0$$

ait ses trois racines réelles et inégales, les coefficients p et q étant supposés réels.

246. — Discuter les racines de l'équation

$$x^6 - 3x^5 + mx^3 - 3x + 1 = 0,$$

dans laquelle m est un paramètre qui peut varier de $-\infty$ à $+\infty$.

Géométrie et Mécanique.

I. — **247.** On donne une surface gauche de révolution S, une droite Z parallèle à l'axe de cette surface et une droite D choisie de telle sorte que la perpendiculaire commune aux deux droites Z et D soit dans le plan P du cercle de gorge de la surface S.

Soit M un point d'intersection de la surface S et de la droite D. Trouver le lieu géométrique décrit par la projection orthogonale du point M sur le plan P lorsque la droite D tourne autour de la droite Z supposée fixe.

II. — Expliquer comment on mène par une droite donnée un plan tangent à une surface gauche de révolution. Déterminer le point de contact de ce plan et de la surface.

Faire l'épure à main levée. La surface gauche de révolution est déterminée par son axe, que l'on prendra vertical, et par les projections de l'une de ses génératrices.

III. — **248.** Une demi-circonférence, de rayon r, limitée par le diamètre AB, est partagée en n parties égales aux points A_1, A_2, A_3, ... A_{n-1}. Chacun de ces points attire le point B proportionnellement à la distance qui le sépare de celui-ci, l'attraction à l'unité de distance étant représentée par k.

1° Déterminer la résultante R du système des forces ainsi appliquées au point B.

2° Vers quelle direction-limite tend cette résultante lorsque le nombre n augmente au delà de toute limite?

QUESTIONS PROPOSÉES

249. — On donne une famille de coniques homofocales; par un foyer F on mène une droite fixe. Prouver: 1° que les tangentes aux points de rencontre de cette droite fixe D avec les coniques enveloppe une parabole ayant pour foyer le point F et pour directrice la droite D; 2° que la portion de chaque tangente comprise entre la conique correspondante et la parabole est vue du foyer F sous un angle droit.

(Hugon Ch., à Nîmes.)

250. — Trouver le lieu des foyers des coniques inscrites dans un triangle et dont l'un des foyers décrit une droite. Examiner le cas où cette droite est à l'infini et, dans ce cas, chercher l'enveloppe des axes du lieu et démontrer qu'il existe un point et un seul d'où l'on voit ce lieu sous un angle droit.

(Hugon Ch.)

251. — On considère une conique à centre et deux points fixes P, P′ situés sur un même diamètre; soit MM′ un diamètre variable de la conique, M et M′ étant les points de rencontre de ce diamètre et de la conique; trouver le lieu du point de rencontre des droites PM, P′M′.

(H. Brélivet, lycée de Nantes.)

252. — Étant donnée une cubique n'ayant pas de points singuliers, on mène des tangentes à cette courbe par un de ses points A. Soient T_1, T_2, T_3, T_4 les points de contact des tangentes autres que la tangente en A. Démontrer que le point de rencontre M des diagonales du quadrilatère $T_1T_2T_3T_4$ et les points de rencontre M′, M″ des côtés opposés sont sur la cubique, et que les tangentes à la cubique aux points M, M′, M″ concourent en un même point, qui est le point de rencontre de la tangente en A avec la cubique.

(P. Valat, Périgueux.)

253. — Étant donnée une cissoïde, trouver : 1° le lieu du milieu d'une corde AB vue du point de rebroussement sous un angle droit; 2° l'enveloppe de AB.

(H. Cheronnet, lycée Condorcet.)

254. — On donne un triangle fixe ABC et l'on considère des coniques inscrites dans ce triangle et telles que leurs cercles orthoptiques passent par un point fixe F. Enveloppe des côtés du triangle polaire de ABC, par rapport à ces coniques.

(H. Cheronnet.)

255. — M et M′ étant deux points d'une ellipse ayant pour foyers F, F′, les quatre droites MF, MF′, M′F, M′F′ sont tangentes à un même cercle.

(P. Fages, Marseille.)

***256.** — On considère toutes les paraboles tangentes à un cercle en un point donné et dont les axes ont une direction donnée. Soient A et B les points où l'une de ces paraboles coupe le cercle. Trouver le lieu du pôle de AB par rapport au cercle.

(Bernard Denain, lycée de Rouen.)

Le Rédacteur Gérant : H. VUIBERT.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX. — 1354-1-93

3e Année. N° 6. Mars 1893.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

MOUVEMENT D'UNE FIGURE PLANE DANS SON PLAN

Par M. **E. Humbert**, professeur de mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand.

Nous admettrons les notions suivantes, qui sont fondamentales en géométrie plane.

1° Il existe une surface telle que toute droite ayant deux de ses points sur cette surface est tout entière située sur elle. Cette surface est le *plan*.

2° Nous envisagerons souvent, dans la pensée, pour la commodité de l'exposition, un plan comme formé par la réunion de plusieurs autres, de plusieurs feuillets superposés. Si un plan P coïncide avec un plan Q, dans une position déterminée, en amenant une figure du plan P dans une autre position quelconque sur le plan Q, et regardant le plan mobile P comme lié invariablement à la figure qu'il contient, il ne cesse de coïncider avec le plan Q. Le plan est donc une surface identique à elle-même dans toutes ses parties. Nous exprimerons encore ce fait en disant qu'un plan ne cesse de coïncider avec sa position initiale par un mouvement de *glissement* quelconque.

3° Toute surface a deux faces; *les deux faces d'un plan sont identiques*. Si on retourne un plan, par exemple, en le faisant tourner de 180° autour d'une de ses droites, à la fin du mouvement, il coïncide encore avec sa position initiale. Nous exprimerons ce fait en disant qu'un plan coïncide avec sa position initiale *par retournement*.

4° Une droite indéfinie dans un plan le partage en deux régions, et un point mobile dans le plan ne peut passer de l'une des régions à l'autre sans traverser la droite.

5° Si une demi-droite, issue d'un point et située dans un plan, tourne autour de ce point, elle peut obéir à ce mouvement en restant toujours dans ce plan, en tournant toujours dans le même sens, pour un observateur qui repose sur le plan, et en décrivant tout le plan, c'est-à-dire en passant une fois par chaque point du plan. Il est facile de déduire de là l'idée d'orientation d'un plan et une définition précise des angles et des lignes brisées quelconques, et, par suite, des figures planes quelconques.

6° Un plan quelconque partage l'espace en deux régions et un point mobile ne peut passer d'une région à l'autre, sans traverser le plan. Chacune des faces du plan limite en quelque sorte la région correspondante, et tout observateur placé dans cette région voit la face dont il est question.

Cela posé, considérons un observateur O_1 qui marche sur l'une des faces d'un plan, perpendiculairement à cette face, et un observateur, O_2, placé de la même manière sur l'autre face. Pour le premier observateur, il y a deux sens de rotation d'une demi-droite dans la face qu'il regarde; adoptons l'un d'eux, le plan sera alors *orienté*. Il suffit donc de se donner, dans cette face, un angle formé par deux demi-droites O1 et O2 *(fig. 1)*, en indiquant le premier côté O1, et le second O2, pour que le plan soit orienté; le sens adopté sera le sens de rotation d'une demi-droite qui décrit l'angle considéré pour aller de O1 à O2. En donnant alors à tout angle tracé dans cette face un premier et un second côté, et le regardant comme décrit par une demi-droite qui tourne du premier côté jusqu'au second, chaque angle aura un sens bien déterminé. Au point de vue du calcul, nous affecterons du signe + ceux qui sont décrits dans le sens adopté; nous affecterons les autres du signe −.

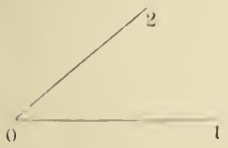


Fig. 1.

Il est alors aisé de définir avec précision une ligne brisée plane quelconque. Soient $\overline{102}$ l'angle fondamental, et ABCDEFGH une ligne brisée quelconque *(fig. 2)*; faisons parcourir cette ligne brisée par un mobile qui parte d'une extrémité pour atteindre l'autre, par exemple qui aille de A en B, puis en C, etc., jusqu'en H. Nous appellerons *premier côté* de l'angle formé en un sommet quelconque, E . celui qui est parcouru le premier, et, *second côté*, l'autre; alors chacun des angles de la ligne brisée est bien défini en grandeur et en signe : l'angle B est positif, l'angle C négatif, etc. Nous appellerons côtés de la ligne brisée, les longueurs des portions de droite AB, BC. De cette façon, tous les éléments de cette ligne seront parfaitement définis.

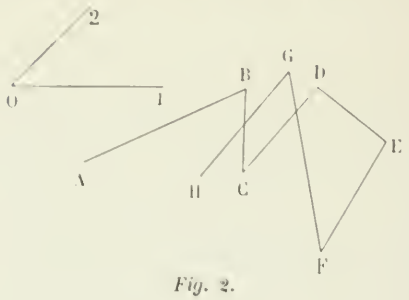


Fig. 2.

Il est alors aisé de dire ce qu'on entend par ligne brisée régulière : on appelle *ligne brisée régulière* une ligne dont tous les côtés sont égaux et dont tous les angles sont égaux en grandeur et en signe *(fig. 3)*.

On peut faire correspondre deux lignes brisées, ayant un même nombre de côtés, élément à élément, et établir entre elles des relations de diverses natures, telles que l'égalité, la similitude, etc. Mais nous ne voulons pas développer outre mesure ces définitions, qui sont très faciles à apercevoir dans chaque cas, et dont l'extension aurait l'inconvénient de nous écarter du sujet spécial que nous voulons traiter.

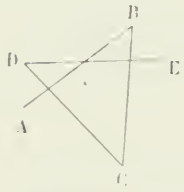


Fig. 3.

En même temps que O_1, considérons maintenant l'observateur O_2, opposé au premier, et supposons le plan transparent, de façon que les figures de la première face puissent être lues par l'observateur de la seconde face; tout angle tracé sur cette première face sera parcouru pour lui dans un sens contraire à celui que constate le premier observateur. Si, alors, on considère deux figures F et F_1, symétriques par rapport à une droite Δ de leur plan, on amènera la seconde sur la première, en faisant tourner le plan autour de Δ, d'un angle égal à 180°, et en pensant que la figure F_1 est tracée sur la seconde face. Au moment de la coïncidence, l'observateur O_2 est dans la même position que O_1; donc la figure F_1 est disposée primitivement de la même façon, par rapport à O_2, que F par rapport à O_1; en d'autres termes, les figures F et F_1, supposées toutes deux sur la première face, sont inversement disposées par rapport à l'observateur de cette face, O_1, c'est-à-dire que les angles qui se correspondent dans ces figures sont égaux et de signes contraires. En particulier, deux angles symétriques par rapport à une droite, sont égaux et de signes contraires.

Lorsque deux figures sont égales, en vertu de certaines hypothèses, et d'après certains théorèmes, deux cas peuvent se présenter : ou bien leurs angles correspondants sont égaux et de même sens, et alors on les amène à coïncider par un glissement du plan de l'une d'elles sur le plan de l'autre; ou bien leurs angles correspondants sont égaux et de sens contraires, et alors on les amène à coïncider, en retournant d'abord le plan de l'une d'elles, puis en le faisant ensuite glisser sur le plan de l'autre.

On trouve là, l'explication naturelle de la symétrie dans l'espace : celle-ci se ramène à la symétrie des trièdres, et, par suite à la symétrie des triangles sphériques, et ceux-ci ne peuvent coïncider parce que la sphère n'est pas une surface retournable, qu'elle n'a pas ses deux faces identiques. Les seules figures qui peuvent coïncider sont alors celles qui ont leurs éléments disposés de la même façon, parce qu'un simple glissement de la sphère sur elle-même suffit. La symétrie sur le plan ne fait que reproduire la figure primitive, tandis que sur la sphère, elle donne une figure nouvelle, essentiellement différente de la première.

Si nous nous sommes étendu si longuement sur ces notions préliminaires, c'est qu'elles permettent d'exposer avec clarté une foule de questions de géométrie, qui, sans cela, sont obscures et manquent de rigueur. Revenons maintenant à l'objet de cette note.

Si l'on considère un ensemble quelconque de points formant une figure plane, il est évident qu'il suffira de connaître la position de deux points quelconques de cette figure, ou même simplement de deux points rattachés à cette figure, pour que sa position soit parfaitement fixée, à la condition toutefois que, pour chaque point de l'ensemble, on connaisse les deux autres côtés du triangle qu'il forme avec les deux points fondamentaux et aussi l'orientation de ce triangle. Car soient A et B *(fig. 4)* les positions qu'occupent les deux points fondamentaux, et a et b les longueurs des côtés MB et MA du triangle qui correspond au point M; avec ces longueurs, on peut construire deux triangles seulement, ABM et ABM′, qui peuvent répondre à la question; or ces deux triangles sont symétriques par rapport à AB, et, par conséquent, ont des dispositions inverses pour un observateur de la face que l'on considère dans le plan. Il y a donc un seul de ces triangles qui a la disposition voulue, et le point M est parfaitement fixé.

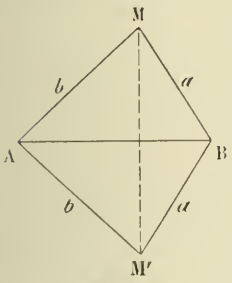


Fig. 4.

Il résulte de là que si l'on considère une figure plane quelconque, F, située dans un plan P, mobile sur un plan fixe Q, il suffira de connaître à chaque instant la position d'un segment de droite AB, rattaché à cette figure, pour connaître la position de la figure elle-même; car les éléments de la figure sont connus dans sa position initiale avec leurs dispositions par rapport à AB, et dans le mouvement de glissement de P sur Q, l'ensemble considéré est inaltéré pour un observateur O'_1 de l'une des faces du plan, supposé entraîné avec le plan mobile, et cet observateur peut dans chacune de ses positions être pris pour l'observateur O_1 qui regarde cette face du plan P (ou du plan Q).

Tout revient donc à étudier le déplacement d'un segment de droite limité AB sur une face d'un plan.

Soient A_1B_1 et A_2B_2 deux positions de ce segment. Nous allons montrer qu'*on peut amener* A_1B_1 *sur* A_2B_2 *par une rotation du plan* P *sur le plan* Q, *autour d'un certain point* O *de ce plan.*

Il faut établir, pour cela, que les rayons qui vont d'un certain point O du plan Q, aux deux points A_1 et B_1, peuvent être amenés sur ceux qui vont de O aux points correspondants, A_2 et B_2, en décrivant simultanément autour de ce point des angles égaux et de même sens.

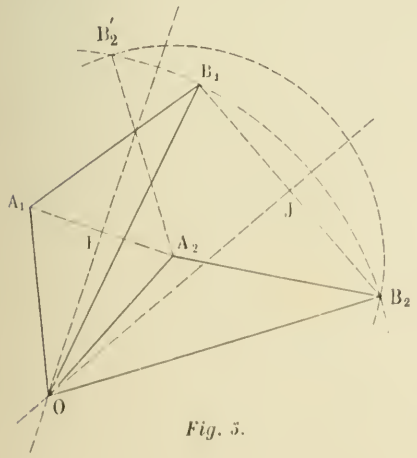


Fig. 5.

Si le point O existe, les points A et B décrivent des cercles ayant ce point pour centre, et, par suite, ce point ne peut être qu'au point de croisement des perpendiculaires IO et JO, élevées aux milieux de A_1A_2 et de B_1B_2. Nous examinerons alors les trois cas suivants :

1° Les deux perpendiculaires IO et JO à A_1A_2 et B_1B_2, en leurs milieux respectifs, se coupent en un seul point O *(fig. 5)*.

Alors on a $OA_1 = OA_2$, $OB_1 = OB_2$ et aussi $A_1B_1 = A_2B_2$, puisque ce sont deux positions d'un même segment; donc les triangles OA_1B_1 et OA_2B_2 sont égaux. Il reste à établir qu'ils sont orientés de la même façon, c'est-à-dire que les angles A_1OB_1 et A_2OB_2 ont le même sens. Pour cela, remarquons que tous les points étant supposés placés, sauf le point B_2, celui-ci ne peut occuper que deux positions compatibles avec les résultats déjà acquis : il est situé sur le cercle de centre O et de rayon OB_1 et aussi sur le cercle de centre A_2 et de rayon A_1B_1 ; il est donc nécessairement en l'un des points de rencontre de ces deux cercles, B_2 ou B'_2; or l'un de ces points est le

point symétrique de B_1 par rapport à OI, B'_2, car les segments A_1B_1 et $A_2B'_2$ symétriques par rapport à OI ont des longueurs égales. Ce ne peut être là la seconde position du point B, puisque les deux perpendiculaires aux milieux de A_1A_2 et de $B_1B'_2$ coïncident avec OI et qu'elles ont été supposées distinctes. Le point B_2 considéré est donc à l'autre point de rencontre des deux cercles, B_2, symétrique du premier par rapport à la ligne des centres OA_2.

Or, les deux angles A_1OB_1 et $A_2OB'_2$, étant symétriques par rapport à OI, ont des sens inverses; les deux angles $A_2OB'_2$ et A_2OB_2, symétriques par rapport à OA_2, ont aussi des sens inverses; donc les angles A_1OB_1 et A_2OB_2 ont le même sens.

Si, alors, on fait tourner autour de O la première figure, de l'angle A_1OA_2, le point A_1 vient se placer sur le point A_2 et les deux triangles A_1OB_1, A_2OB_2, étant égaux, ayant alors un côté commun, OA_1 qui coïncide avec OA_2, et ayant même orientation, se placent l'un sur l'autre. Tout autre triangle de la figure mobile, ABM, passe ainsi de la position $A_1B_1M_1$ à la position $A_2B_2M_2$, puisqu'à la fin du mouvement les deux triangles égaux $A_1B_1M_1$, $A_2B_2M_2$, orientés de la même façon, par définition du mouvement de glissement, ont un côté commun, A_1B_1 qui coïncide avec A_2B_2.

Il résulte de là que tous les rayons vecteurs OM, allant de O aux divers points de la figure, décrivent des angles égaux et de même sens. Cela se voit aisément si l'on remarque que le segment AM passe ainsi de la position A_1M_1, à la position A_2M_2, de telle sorte que le point M se comporte comme le point B, et qu'il suffit de montrer que l'angle B_1OB_2 est égal à A_1OA_2 et a le même sens que lui; mais cette dernière propriété résulte de ce fait que l'angle AOB reste constant dans le mouvement et garde toujours la même orientation.

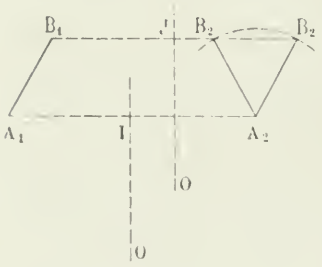


Fig. 6.

2° Les deux perpendiculaires IO et JO à A_1A_2 et B_1B_2, en leurs milieux respectifs, sont distinctes et parallèles *(fig. 6)*.

En supposant placés tous les éléments de la figure actuelle, sauf le point B_2, qui est par hypothèse la position du point B dans la seconde figure, on voit de suite qu'il n'y a que deux positions de ce point qui puissent être compatibles avec les hypothèses faites; car ce point doit être sur un cercle décrit de A_2 comme centre avec AB comme rayon, puis sur la perpendiculaire menée de A_1 à JO ou à IO qui lui est parallèle, c'est-à-dire sur la parallèle à A_1A_2 menée par B_1B_2.

On obtient évidemment ces deux points en menant, d'une part, A_2B_2 parallèle à A_1B_1, d'autre part $A_2B'_2$, symétrique de A_1B_1 par rapport à IO. Mais si le point B était, dans sa seconde position, en B'_2, les perpendiculaires aux milieux de A_1A_2, et $B_1B'_2$ coïncideraient, cas qui a été écarté. Donc A_2B_2 est parallèle à A_1B_1 et la première figure peut être amenée sur la seconde par une translation égale à A_1A_2.

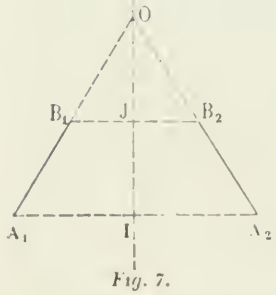


Fig. 7.

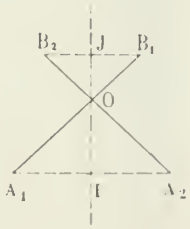


Fig. 8.

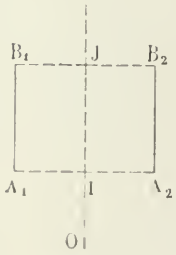


Fig. 9.

Si l'on se rappelle maintenant que lorsque le centre d'un cercle s'éloigne indéfiniment sur une droite fixe, tandis qu'il passe constamment par un point fixe, ce cercle tend vers une certaine droite passant par le point fixe, et les chemins parcourus sur le cercle, vers des chemins égaux parcourus sur cette droite, on peut dire encore que la translation actuelle est une rotation autour du point O, à l'infini, où se coupent IO et JO.

3° Les deux perpendiculaires IO et JO à A_1A_2 et B_1F_2, en leurs milieux respectifs, sont confondues *(fig. 7, 8, 9)*.

Il résulte des considérations précédentes que A_1B_1 et A_2B_2 sont, dans ce cas, symétriques par rapport à IO, et trois cas peuvent encore se présenter : ou bien les deux droites A_1B_1, A_2B_2 se coupent en O sur leurs prolongements; ou bien elles se rencontrent en un point O situé entre A_1, B_1 et A_2, B_2; dans ces deux cas, le point O est sur l'axe de symétrie OI, et il suffit de faire tourner A_1B_1 autour de O d'un angle égal à A_1OA_2, pour l'amener sur A_2B_2. Ou bien elles sont parallèles toutes deux à l'axe de symétrie, et l'on amène A_1B_1 sur A_2B_2 par une translation égale à A_1A_2, c'est-à-dire par une rotation autour du point O, à l'infini, sur OI.

Nous ne poursuivrons pas l'étude de cette question qui s'achève maintenant par des procédés très simples et uniformément employés.

ECOLE CENTRALE (Concours de 1892).

Mathématiques (première session).

185. — *On donne dans un plan deux axes rectangulaires,* Ox, Oy *et une droite* D *dont l'équation est* $Ax + By + C = 0$; *sur cette droite on prend un point quelconque* M, *de coordonnées* a, b, *et à ce point on fait correspondre les deux paraboles qui ont toutes deux le point* O *pour foyer, et, l'une la droite* $x - a = 0$, *l'autre la droite* $y - b = 0$ *pour directrices.*

1° Démontrer que ces deux paraboles ont, en général, deux points communs réels et deux points communs imaginaires, et former, selon la position du point M *sur la droite* D, *l'équation de la droite qui passe par les deux points réels communs aux deux paraboles.*

2° Trouver le lieu des points communs aux deux paraboles que l'on fait ainsi correspondre à un point M, *quand ce point* M *parcourt la droite* D. *Ce lieu se compose, en général, d'une ellipse et d'une hyperbole; distinguer sur la droite* D *la partie que parcourt le point* M *quand les points communs aux deux paraboles sont sur l'ellipse, de celles qu'il parcourt quand ces points sont sur l'hyperbole.*

3° Vérifier analytiquement et expliquer géométriquement les faits suivants. Soit P *le point de rencontre de la droite* D *avec l'un des axes, et soient, sur l'autre axe, de part et d'autre du point* O, *les points* P′ *et* P″ *tels que l'on ait* $OP' = OP'' = OP$. *L'une des deux coniques du lieu passe par* P′ *et l'autre par* P″, *et les tangentes au lieu, au point* P′ *et au point* P″, *sont les droites* PP′, PP″.

Construire le lieu en supposant que l'équation de la droite D *est*

$$x + 2y - 2 = 0.$$

4° Le lieu demandé est, en général, composé d'une véritable ellipse et d'une véritable hyperbole; trouver les divers cas particuliers pour lesquels il en est autrement, et, dans chacun de ces cas, reconnaître ce que deviennent les deux coniques du lieu.

1°. Les deux paraboles ont pour équations

$$x^2 + y^2 = (x - a)^2, \tag{1}$$

$$x^2 + y^2 = (y - b)^2. \tag{2}$$

En retranchant ces deux équations, on obtient

$$(x - a)^2 - (y - b)^2 = 0,$$

équation d'un couple de sécantes communes; les points communs aux deux paraboles sont à l'intersection de l'une de ces paraboles et de ces deux sécantes. Ces droites ont pour équations

$$x - a = y - b \tag{3}$$

et

$$x - a = -(y - b). \tag{4}$$

Formons les équations aux abscisses des points d'intersection de la parabole (1) avec les droites (3) et (4); on obtient

$$x^2 + 2bx + b^2 - 2ab = 0,$$
$$x^2 - 2bx + b^2 + 2ab = 0.$$

Si $ab > 0$, la première a ses racines réelles et la seconde ses racines imaginaires; c'est le contraire, si $ab < 0$.

Il en résulte que les deux paraboles n'ont que deux points communs réels; la droite qui les joint est la droite (3) si $ab > 0$ et la droite (4) si $ab < 0$.

2°. Pour que ab soit positif, il faut que le point M se trouve sur la portion de la droite D qui traverse les angles xOy et $x'Oy'$; supposons que le point M se déplace sur cette portion; le lieu des points communs réels aux deux paraboles s'obtiendra en éliminant a et b entre les équations

$$x^2 + y^2 = (x - a)^2,$$
$$x - a = y - b,$$
$$Aa + Bb + C = 0.$$

Des deux dernières, on déduit, en supposant $A + B \neq 0$,

$$x = \frac{B(x - y) + C}{A + B}$$

et, en remplaçant dans la première, on obtient

$$x^2 + y^2 = \frac{(Ax + By + C)^2}{(A + B)^2}. \qquad (5)$$

Cette équation représente une conique qui a pour foyer le point O, pour directrice la droite D et dont le carré de l'excentricité est $\frac{A^2 + B^2}{(A + B)^2}$. Cette conique sera donc une ellipse si $AB > 0$ et une hyperbole si $AB < 0$.

Si au contraire le point M se déplace sur la portion de la droite D qui traverse les angles $x'Oy$ et xOy', c'est-à-dire si $ab < 0$, le lieu des points communs aux deux paraboles s'obtiendra en éliminant a et b entre les équations

$$x^2 + y^2 = (y - b)^2,$$
$$x - a = -(y - b),$$
$$Aa + Bb + C = 0.$$

On obtient, en supposant $A - B \neq 0$,

$$x^2 + y^2 = \frac{(Ax + By + C)^2}{(A - B)^2}; \qquad (6)$$

équation d'une conique ayant le point O pour foyer, la droite D pour directrice et dont le carré de l'excentricité est $\frac{A^2 + B^2}{(A - B)^2}$. Cette conique sera une ellipse si $AB < 0$ et une hyperbole si $AB > 0$.

En résumé, en supposant $(A + B)(A - B)AB \neq 0$,
le lieu cherché se compose des coniques (5) et (6); si $AB > 0$, la conique (5) est une ellipse, la conique (6) une hyperbole; c'est le contraire si $AB < 0$.

Quand les points communs aux deux paraboles sont sur la conique (5), le point M décrit la partie de la droite D qui se trouve dans les angles xOy et $x'Oy'$; quand ces points sont sur la conique (6), le point M décrit la partie de la droite D qui se trouve dans les angles $x'Oy$ et xOy'.

3°. Le point P, intersection de D avec Ox, a pour abscisse $-\frac{C}{A}$; les deux points P′ et P″ seront alors sur Oy et auront pour ordonnées $\pm\frac{C}{A}$.

On reconnaît sans peine que le point P′ $\left(0, \frac{C}{A}\right)$ est sur la conique (5) et que le point P″ $\left(0, -\frac{C}{A}\right)$ est sur la conique (6).

L'équation de la tangente en un point (x', y') de la conique (5) peut s'écrire

$$xx' + yy' = \frac{(Ax + By + C)(Ax' + By' + C)}{(A + B)^2};$$

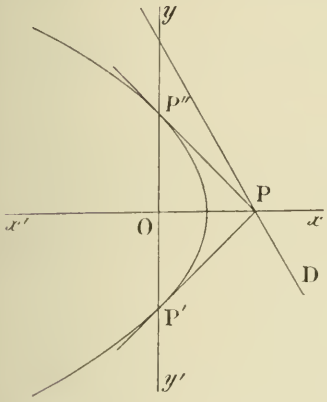
on aura donc, pour la tangente au point P',

$$\frac{C}{A}y = \frac{(Ax + By + C)\left(\frac{BC}{A} + C\right)}{(A + B)^2}$$

ou

$$A(y - x) - C = 0,$$

équation qui représente la droite PP'.



Ces résultats peuvent s'expliquer géométriquement.

Quand le point M est en P, le parabole (2) se réduit à l'axe des y, lequel rencontre la parabole (1) précisément aux points P' et P'', puisque dans cette parabole qui a pour paramètre OP, l'ordonnée du foyer est égale au paramètre.

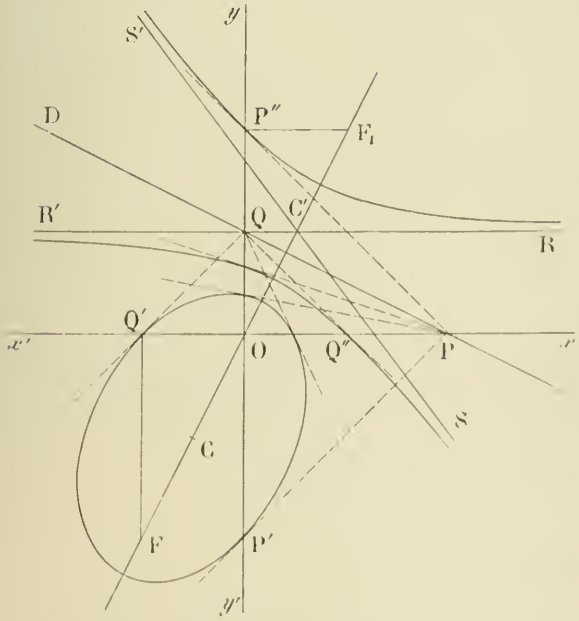
Les points P' et P'' sont donc des points du lieu; de plus, le point P' appartient à la conique (5), car la droite PP' est une position particulière de la droite (3); le point P'' appartient au contraire à la conique (6), puisque la droite PP'' est une position particulière de la droite (4).

Pour démontrer que PP' est tangente en P' à la conique (5), il suffit d'observer que cette conique a pour foyer le point O et pour directrice la droite D. Le point P étant sur la directrice et PO étant perpendiculaire à OP', la droite OP' est la polaire du point P; de même OP'' est la polaire du point P par rapport à la conique (6).

On verrait de même, en désignant par Q le point de rencontre de la droite D avec Oy, et Q', Q'' les points de Ox tels que

$$OQ' = OQ'' = OQ,$$

que les deux coniques passent par les points Q', Q'' et sont tangentes aux droites QQ' et QQ''.



Supposons maintenant que la droite D ait pour équation

$$x + 2y - 2 = 0;$$

les équations des deux coniques qui constituent le lieu sont

$$x^2 + y^2 = \frac{(x + 2y - 2)^2}{9},$$

$$x^2 + y^2 = (x + 2y - 2)^2.$$

La première est une ellipse qui passe par les points Q' et P'; le deuxième foyer se trouve sur l'axe focal (droite menée par O perpendiculaire à D) et sur la droite menée par Q' perpendiculaire à Ox, puisque les deux rayons vecteurs Q'O et Q'F sont également inclinés sur la tangente.

La deuxième est une hyperbole passant par les points P'' et Q'' et dont le deuxième foyer est sur la perpendiculaire à Oy menée par P''. Elle a en outre une asymptote passant par le point Q et parallèle à Ox.

4°. Dans la discussion qui précède nous avons supposé

$$(A + B)(A - B)AB \neq 0.$$

Nous allons maintenant examiner les cas où cette inégalité n'a pas lieu.

Supposons d'abord $A + B = 0$; la droite D est parallèle à la bissectrice de l'angle xOy ; quand le point M se déplace sur cette droite, la sécante commune aux deux paraboles représentée par l'équation (3) coïncide avec la droite D et par suite cette droite fait partie du lieu et remplace la conique (5). La conique (6) est dans ce cas une véritable ellipse.

Si $A - B = 0$, la conique (6) se réduit à la droite D et la conique (5) est une ellipse.

Enfin si $A = 0$, la droite D est parallèle à Ox, la parabole (2) est fixe et elle constitue le lieu demandé.

On voit d'ailleurs que, dans ce cas, les deux équations (5) et (6) se réduisent à l'équation de cette parabole.

On a des conclusions analogues si $B = 0$.

Remarquons en terminant que si la droite D passe par l'origine, les deux coniques se réduisent à des couples de droites passant par l'origine.

Lucien Sueur, lycée Charlemagne.

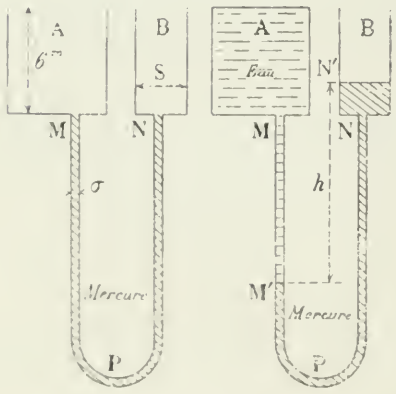
Ont envoyé des solutions exactes : MM. H. Allard (Condorcet); E. Bourrienne à Écos; J. Hais, à Étampes; Th. Louzon; Rau (Condorcet); Vazou, à Falaise.

Physique (deuxième session).

212. — *Deux vases* A *et* B, *d'une profondeur de* 6^m, *sont réunis par un tube* MNP *de grande longueur rempli de mercure; les ouvertures* MN *sont dans un même plan horizontal.*

On verse dans le vase A *de l'eau, jusqu'à ce qu'il en soit complètement rempli; l'eau refoule le mercure du tube en* M′ *d'un côté, en* N′ *de l'autre.*

On demande d'évaluer la distance h *des niveaux* M′N′, *sachant que le rapport* $\frac{\sigma}{S}$ *des sections du tube* MNP *et du vase* B *est égal à* $\frac{1}{10}$ *et que la densité du mercure est* 13,59.



Soient x et y les distances verticales MM′ et NN′; on a

$$x + y = h,$$
$$\sigma x = Sy,$$

en écrivant que le liquide occupe le même volume en MM′ et NN′.

On tire de là $\quad y = \frac{\sigma}{S} x = \frac{x}{10}$

et par suite $\quad x = \frac{10h}{11}.$

Écrivons maintenant que la pression est la même dans le plan horizontal passant par M′;

on a $\quad 6 + x = 13{,}59h$

ou $\quad 6 + \frac{10h}{11} = 13{,}59h$

et $\quad h = \frac{66}{13{,}59 \times 11 - 10} = 0^m{,}473$

A. Duhameaux, Lycée d'Amiens.

Ont résolu la même question : MM. A. Bailly (lycée de Dijon); Charles Braillion (lycée d'Amiens); J. Fitte (lycée de Toulouse); E. Foucart (lycée Michelet).

ALGÈBRE

192. — *On inscrit un rectangle dans un demi-cercle et l'on construit sur le côté parallèle au diamètre un triangle rectangle et isocèle. Étudier la variation du pentagone obtenu.*

Soit x la moitié du côté du rectangle dirigé suivant le diamètre; l'autre côté du rectangle est $\sqrt{r^2 - x^2}$, r désignant le rayon du cercle donné; l'aire du rectangle a pour mesure $2x\sqrt{r^2 - x^2}$, et l'aire du triangle rectangle isocèle dont $2x$ est l'hypoténuse est représentée par x^2. L'aire du pentagone convexe formé par ces deux figures réunies vaut donc

$$x^2 + 2x\sqrt{r^2 - x^2}. \tag{1}$$

Soit y cette fonction. Elle est réelle, finie et continue pour toute valeur de x comprise entre $-r$ et $+r$.

Cherchons ce qu'elle représente quand on attribue à x une valeur négative $-x'$; y devient alors

$$x'^2 - 2x'\sqrt{r^2 - x'^2}, \tag{2}$$

et représente évidemment l'*excès de l'aire du triangle sur celle du rectangle*, excès qui peut être positif ou négatif. On obtiendrait cette même fonction (2) si, conservant pour x une valeur positive, on changeait dans la fonction (1) le signe du radical; il nous suffira donc d'étudier les fonctions (1) et (2), x variant de zéro à $+r$, pour connaître toutes les circonstances de la variation de l'aire du pentagone convexe et de celle du pentagone non convexe qu'on obtient en plaçant le triangle isocèle soit d'un côté, soit de l'autre.

Occupons-nous d'abord de la fonction (1); elle est nulle pour $x = 0$ et sa valeur est r^2 pour $x = r$. Sa dérivée,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(x\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

est réelle, finie et continue pour toutes les valeurs de x inférieures à r. Quand x part de zéro, elle est positive, et si x se rapproche de plus en plus de r elle est très grande et négative. On peut donc prévoir que cette dérivée s'est annulée au moins une fois dans l'intervalle. En l'égalant à zéro, on a l'équation

$$x\sqrt{r^2 - x^2} = 2x^2 - r^2, \tag{3}$$

qui, rendue rationnelle et ordonnée, devient

$$5x^4 - 5r^2x^2 + r^4 = 0. \tag{4}$$

Les deux valeurs de x^2 données par cette équation sont réelles, positives et ont pour somme r^2; mais nous ne devons prendre que la plus grande, qui seule rend positive la quantité $2x^2 - r^2$ ou $2\left(x^2 - \frac{r^2}{2}\right)$; la plus petite racine a été introduite par l'élévation au carré. La dérivée est donc nulle pour

$$x = r\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}$$

et seulement pour cette valeur. En l'appelant α, on voit que la dérivée est positive, x variant de zéro à α, puis négative, x variant de α à r. La fonction y est donc croissante dans le premier intervalle, et décroissante dans le second. Elle passe par un maximum pour $x = \alpha$.

Considérons maintenant la fonction (2), que nous représenterons par z,

$$z = x^2 - 2x\sqrt{r^2 - x^2}. \qquad (2)$$

Cette fonction, réelle, finie et continue aux mêmes conditions que y part aussi de zéro en même temps que x et arrive comme y à la valeur r^2 pour $x = r$.

La dérivée
$$\frac{dz}{dx} = \frac{2(x\sqrt{r^2 - x^2} - r^2 + 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

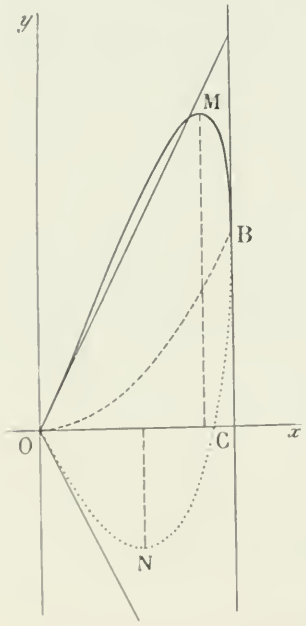
se déduit de celle de y par le changement de signe du radical. Elle commence par être négative quand x part de zéro, et elle devient très grande et positive quand x est très rapproché de r. Dans l'intervalle cette dérivée ne cesse pas d'être continue; elle s'est donc annulée au moins une fois.

L'équation
$$x\sqrt{r^2 - x^2} = r^2 - 2x^2 \qquad (5)$$

qu'on obtient en l'égalant à zéro, ne diffère de l'équation (3) que par le changement de signe du second membre; elle conduit donc aussi à l'équation (4); mais la racine

$$x = r\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}$$

que nous avons dû rejeter précédemment est la seule qui convienne à l'équation (5). En l'appelant β, on voit que la dérivée de z est négative quand x varie de zéro à β et positive si x croît de β à $+r$; dans le premier intervalle la fonction z est décroissante, et, puisqu'elle part de zéro, elle est négative. Elle passe par un minimum pour $x = \beta$, croît ensuite jusqu'à r^2. Elle s'annule nécessairement pour une valeur de x comprise entre β et r; un calcul très simple montre que cette valeur est $\frac{2r}{\sqrt{5}}$.



MM. Ch. Braillion et A. Duhameaux (lycée d'Amiens), Ch. Turchi (à Ferrare) ont résolu cette question.

Nous pouvons représenter par une courbe les variations de ces fonctions; mais, comme y représente ici une aire, il faudra construire la courbe

$$Ry = x^2 \pm 2x\sqrt{R^2 - x^2},$$

de sorte que l'aire correspondante à une abscisse donnée sera représentée par Ry.

La première fonction correspond à l'arc en trait plein OMB et représente les sommes des aires du triangle et du rectangle.

La deuxième fonction correspond à l'arc en trait pointillé ONB et représente les différences des aires du triangle et du rectangle.

De O en C, l'aire du rectangle est la plus grande en valeur absolue; pour $x = \frac{2R}{\sqrt{5}}$, les deux aires sont égales; de C en B, l'aire du triangle est la plus grande en valeur absolue.

La courbe est symétrique par rapport à l'origine; les tangentes à l'origine sont tangentes d'inflexion.

Enfin pour construire la courbe, on s'est aidé de la parabole diamétrale $Ry = x^2$. On n'a tracé que la partie qui correspond aux abscisses positives.

Charles Turchi, à Ferrare.

GEOMÉTRIE ANALYTIQUE

157. — *Trouver la condition pour que les normales à l'ellipsoïde* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ *aux points d'intersection par le plan* $u\frac{x}{a} + v\frac{y}{b} + w\frac{z}{c} - 1 = 0$ *soient rencontrées par une même droite. Montrer que si la relation trouvée est remplie, les normales aux points d'intersection de l'ellipsoïde donné par le plan* $\frac{x}{ua} + \frac{y}{vb} + \frac{z}{wc} - 1 = 0$ *rencontrent la même droite.*

La normale en un point x, y, z de l'ellipsoïde a pour équations

$$\frac{X - x}{\frac{x}{a^2}} = \frac{Y - y}{\frac{y}{b^2}} = \frac{Z - z}{\frac{z}{c^2}};$$

pour qu'elle rencontre la droite Δ, qui a pour équations

$$\frac{X - p}{l} = \frac{Y - q}{m} = \frac{Z - r}{n},$$

il faut qu'on ait

$$\begin{vmatrix} x - p & \frac{x}{a^2} & l \\ y - q & \frac{y}{b^2} & m \\ z - r & \frac{z}{c^2} & n \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\varphi(x,y,z) = l\left[yz\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right) - \frac{qz}{c^2} + \frac{ry}{b^2}\right] + m\left[zx\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right) - \frac{rx}{a^2} + \frac{pz}{c^2}\right] + n\left[xy\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) - \frac{py}{b^2} + \frac{qx}{a^2}\right) = 0. \quad (1)$$

Cette condition doit être satisfaite pour toutes les valeurs de x, y, z qui vérifient les deux équations

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad (2)$$

$$u\frac{x}{a} + v\frac{y}{b} + w\frac{z}{c} - 1 = 0. \quad (3)$$

Cela revient à dire que la quadrique représentée par l'équation (1) doit passer par la conique section de l'ellipsoïde (2) par le plan (3).

Pour qu'il en soit ainsi, il faut qu'on ait une identité de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 + \lambda\varphi(x,y,z) \equiv \left(u\frac{x}{a} + v\frac{y}{b} + w\frac{z}{c} - 1\right)(Ax + By + Cz + D).$$

En égalant les coefficients de x^2, y^2, z^2 et les termes indépendants on voit que

$$Ax + By + Cz + D = \frac{x}{ua} + \frac{y}{vb} + \frac{z}{wc} + 1,$$

ce qui montre que la deuxième partie de la question est une conséquence immédiate de la première.

L'identité devient alors

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1+\lambda\varphi(x,y,z)\equiv\left(u\frac{x}{a}+v\frac{y}{b}+w\frac{z}{c}-1\right)\left(\frac{x}{ua}+\frac{y}{vb}+\frac{z}{wc}+1\right).$$

et en égalant les coefficients des autres termes, on obtient

$$\left.\begin{aligned}\lambda l&=\frac{bc(v^2+w^2)}{(b^2-c^2)vw}\\ \lambda m&=\frac{ca(w^2+u^2)}{(c^2-a^2)wu}\\ \lambda n&=\frac{ab(u^2+v^2)}{(a^2-b^2)uv}\end{aligned}\right\}\quad(4)\qquad\left.\begin{aligned}\lambda(nq-mr)&=\frac{a(u^2-1)}{u}\\ \lambda(lr-np)&=\frac{b(v^2-1)}{v}\\ \lambda(mp-lq)&=\frac{c(w^2-1)}{w}\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

et tout revient à trouver la condition pour que ces équations aient un système de solutions communes en λ, l, m, n, p, q, r.

En multipliant membre à membre les équations correspondantes des systèmes (4) et (5) et ajoutant, on obtient

$$\frac{(v^2+w^2)(u^2-1)}{b^2-c^2}+\frac{(w^2+u^2)(v^2-1)}{c^2-a^2}+\frac{(u^2+v^2)(w^2-1)}{a^2-b^2}=0.$$

C'est la relation demandée.

Si cette condition est remplie, les équations (4) déterminent l, m et n à un facteur près, et les équations (5) qui se réduisent alors à *deux* donnent une infinité de systèmes de valeurs pour p, q, r; mais tous les points qui ont ces valeurs pour coordonnées sont sur une même droite, qui est précisément la droite que rencontrent les normales à l'ellipsoïde aux points d'intersection par le plan (3).

D'ailleurs, les équations (5) où l'on y considère p, q, r comme coordonnées courantes, représentent les projections de cette droite sur les plans coordonnés.

L. Contejean,

Autres solutions par MM. Armand Cahen, étudiant à la Sorbonne, et J. Hais, à Pierres.

---

166. — *Étant donné un cylindre parabolique, on demande le lieu du foyer de la section faite dans ce cylindre par un plan mobile coupant le plan d'une section droite du cylindre suivant une normale à cette section.*

Avant de résoudre la question proposée, nous allons indiquer un procédé général pour déterminer les foyers d'une section plane d'une quadrique.

Pour qu'un point F situé dans un plan P soit foyer de la section plane déterminée dans une quadrique Q par le plan P, il faut et il suffit que les tangentes menées du point F à la section passent par les points cycliques du plan P, ou, en d'autres termes, constituent une conique du genre cercle. Or ces tangentes sont à l'intersection du plan P et du cône C qui a pour sommet le point F et qui est circonscrit à la quadrique Q.

Donc pour que le point F soit foyer, il faut et il suffit que le plan P soit un plan de section circulaire du cône C.

Soient

$$f(x,y,z)=0,$$

$$ux+vy+wz+h=0$$

les équations de la quadrique et du plan; soient α, β, γ les coordonnées du point F; on aura d'abord

$$u\alpha+v\beta+w\gamma+h=0;\qquad(1)$$

en outre, l'équation du cône C étant

$$(xf'_\alpha + yf'_\beta + zf'_\gamma + f'_\delta)^2 - 4f(x, y, z)f(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

il faudra que l'expression

$$(xf'_\alpha + yf'_\beta + zf'_\gamma)^2 - 4\varphi(x, y, z)f(\alpha, \beta, \gamma) - S(x^2 + y^2 + z^2) \qquad (2)$$

[où $\varphi(x, y, z)$ désigne l'ensemble des termes du second degré de la fonction $f(x, y, z)$] soit divisible par $ux + vy + wz$ pour une valeur convenable de S.

Supposons $w \neq 0$, et remplaçons dans l'expression (2) z par $-\dfrac{ux + vy}{w}$; on obtient une fonction homogène du second degré en x et y qui doit être identiquement nulle. Entre les trois relations ainsi obtenues on élimine aisément S qui y figure au premier degré, et il reste deux équations du second degré en α, β, γ qui, jointes à (1), déterminent les foyers de la section plane considérée.

Revenons maintenant au problème proposé. L'équation du cylindre parabolique peut s'écrire

$$y^2 - 2px = 0,$$

en prenant pour plan des xy le plan de la section droite donnée; une normale à cette section aura pour équations

$$y - mx - h = 0, \qquad z = 0,$$

en posant, pour simplifier l'écriture,

$$h = -pm - \frac{pm^3}{2}; \qquad (3)$$

soit enfin

$$z - \lambda(y - mx - h) = 0$$

l'équation d'un plan passant par cette normale.

Si α, β, γ désignent les coordonnées d'un point F du lieu, on aura d'abord

$$\gamma - \lambda(\beta - m\alpha - h) = 0. \qquad (4)$$

Le cône circonscrit à la surface de sommet F qui se réduit ici à un système de deux plans, a pour équation

$$[\beta y - p(x + \alpha)]^2 - (y^2 - 2px)(\beta^2 - 2p\alpha) = 0;$$

l'ensemble des termes du second degré du premier membre se réduit, en divisant par p, à

$$px^2 - 2\beta xy + 2\alpha y^2,$$

et tout revient à écrire que

$$px^2 - 2\beta xy + 2\alpha y^2 - S(x^2 + y^2 + z^2)$$

est divisible par $z - \lambda(y - mx)$, c'est-à-dire que

$$px^2 - 2\beta xy + 2\alpha y^2 - S[x^2 + y^2 + \lambda^2(y - mx)^2] \equiv 0.$$

On obtient ainsi

$$\left.\begin{aligned} p - S(1 + \lambda^2 m^2) &= 0 \\ \beta - S\lambda^2 m &= 0, \\ 2\alpha - S(1 + \lambda^2) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

En éliminant S et λ entre les équations (4) et (5), on aura les équations du lieu. Il est préférable d'exprimer α, β, γ en fonction de λ.

Des équations (5) on tire

$$\alpha = \frac{p(\lambda^2 + 1)}{2(\lambda^2 m^2 + 1)}, \qquad \beta = \frac{pm\lambda^2}{\lambda^2 m^2 + 1};$$

en remplaçant dans (4) il vient

$$\gamma = \lambda\,\frac{pm(\lambda^2 - 1) - 2h(\lambda^2 m^2 + 1)}{2(1 + \lambda^2 m^2)}.$$

ou en remplaçant h par sa valeur (3),

$$\gamma = \frac{pm(m^2+1)\lambda[\lambda^2(m^2+1)+1]}{2(\lambda^2m^2+1)}.$$

Les coordonnées d'un point du lieu sont donc fonctions rationnelles de λ; le lieu est donc une cubique unicursale. Cette cubique est plane et son plan est parallèle à Oz, puisque les deux termes des fractions qui représentent α et β sont du premier degré en λ^2; l'équation de ce plan est d'ailleurs

$$\beta = \frac{2m}{1-m^2}\left(\alpha - \frac{p}{2}\right).$$

Sa trace sur le plan de xy est une droite passant par le foyer de la section droite considérée et faisant avec Ox un angle double de celui que fait la normale donnée avec le même axe.

Cette courbe est symétrique par rapport au plan de xy; elle admet pour asymptotes les droites dont les équations sont

$$\alpha = \frac{p}{2m^2}, \qquad \beta = \frac{p}{m},$$

On peut aisément construire sa projection sur le plan des zx ou celui des yz.

MM. A. Cahen, étudiant à la Sorbonne, et L. Maury, répétiteur au lycée d'Alais, ont résolu cette question.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

59. — *Un point* S *de cote* 9^{cm}, *est le sommet d'un cône qui a pour directrice dans le plan horizontal de projection un cercle de rayon* $4^{cm},5$ *tangent à* xy *et dont le centre* O *est en avant de* xy. *Un second cône, dont le sommet* T *a pour cote* 6^{cm}, *a pour directrice dans le plan horizontal de projection un cercle de rayon* 3^{cm}, *qui coupe orthogonalement le cercle* O *et dont le centre* I *a pour éloignement* 9^{cm}. *Ces deux cônes ont une génératrice commune verticale, située à gauche du plan de profil de* I *et dans le plan de profil de* O.

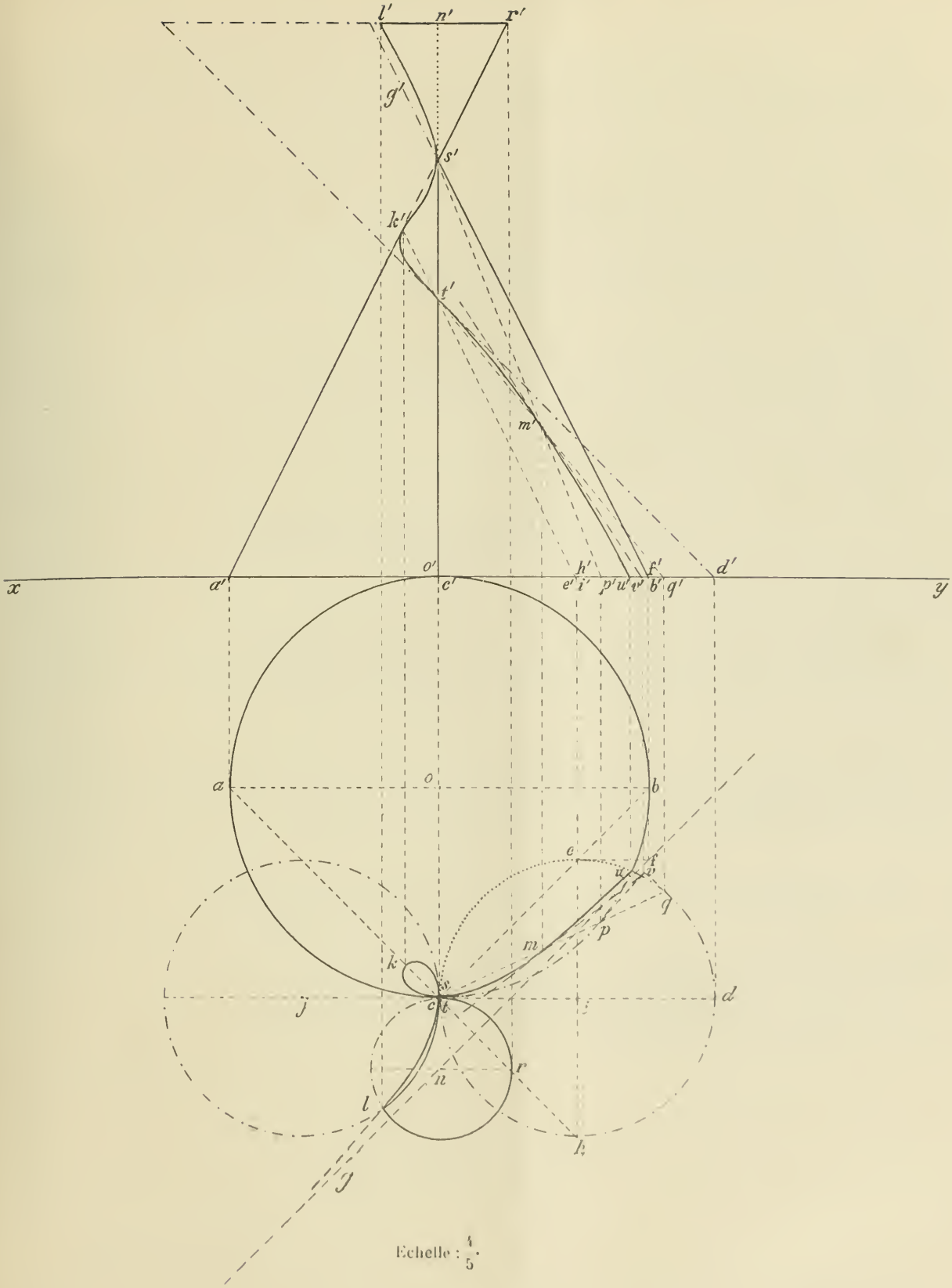
Construire les projections de l'intersection des deux cônes limités d'une part au plan horizontal de projection et d'autre part au plan horizontal qui a pour cote 12^{cm}.

On représentera le cône de sommet S *supposé plein et existant seul en enlevant la portion comprise dans le cône de sommet* T.

Les deux cônes donnés admettant une génératrice commune, leur intersection se compose de cette droite et d'une cubique gauche. Pour construire cette courbe, nous prendrons des plans auxiliaires passant par la génératrice commune, c'est-à-dire des plans verticaux contenant la verticale st, $s't'$. Un de ces plans a pour trace horizontale tpq; il coupe le cône S suivant la génératrice ps, $p's'$ et le cône T suivant la génératrice qt, $q't'$. Ces deux génératrices se rencontrent au point m, m' qui est un point de la cubique cherchée. Déterminons la tangente en ce point; les plans tangents le long des génératrices SP et TQ ont pour traces horizontales pv et qv qui se coupent au point v. Donc vv' est la trace horizontale de la tangente en M, qui est alors mv, $m'v'$.

Pour avoir l'asymptote de cette courbe, prenons les génératrices parallèles sur ces deux cônes; le plan vertical qui les contient a pour trace horizontale teb, car

$$\frac{o'e'}{o'b'} = \frac{te}{eb} = \frac{r}{R-r} = \frac{3}{4,5-3} = \frac{3}{1,5} = 2 = \frac{t'e'}{s't'};$$



Echelle : $\frac{1}{5}$.

Donc $t'e'$ et $s'b'$ sont parallèles. D'ailleurs, la construction ordinaire qui donne les génératrices parallèles sur les deux cônes conduit à ce résultat. Les plans tangents le long de ces deux génératrices se coupent suivant gf, $g'f'$ parallèle à sb, $s'b'$ et qui est l'asymptote cherchée.

Déterminons maintenant la nature de la projection horizontale de la courbe; elle admet le point t comme point double, et les deux tangentes en ce point sont rectangulaires, car l'une est ti et l'autre to. Elle passe par les points cycliques, car elle passe par les points communs aux bases horizontales des deux cônes qui sont des cercles. L'asymptote de cette projection horizontale est fg parallèle à tb et par suite perpendiculaire à ta, bissectrice de l'angle des tangentes au point double. Donc, cette projection horizontale est une strophoïde droite; nous avons déterminé le point k, k' situé sur le contour apparent vertical du cône S qui donne le sommet k de la boucle de la strophoïde.

La projection verticale est une cubique qui admet $s'b'$ comme asymptote. Un de ses points d'inflexion est le point t', car en ce point la tangente $t'd'$ traverse la courbe. Au point s', la tangente est $s'o'$. N. C.

QUESTIONS PROPOSÉES

*257. — On donne deux points F, F'; soit AB la perpendiculaire élevée au milieu de FF'. De l'un de ces points on mène une sécante rencontrant AB en C et l'on mène par C une perpendiculaire CM à CF et de F' on abaisse sur CM une perpendiculaire qui la rencontre en M. Lieu de M.

(Gros.)

258. — On donne un point fixe P dans le plan d'une conique. Par ce point P on mène deux droites telles que le produit de leurs coefficients angulaires soit constant. Montrer que les sécantes communes à la conique et à ces deux droites enveloppent une conique.

(Capitaine E. Barisien.)

259. — En un point quelconque M pris sur la cubique ayant pour équation

$$ay^2 = x^3 \qquad (C)$$

on mène la tangente, qui rencontre la cubique en M'; et de M on mène la tangente MM'' qui touche la cubique en M''. Montrer que lorsque M se déplace sur la cubique C :

1° La droite M' M'' enveloppe une cubique de la même famille que C ;

2° Les milieux des côtés du triangle MM'M'' ainsi que le centre de gravité de ce triangle décrivent chacun une cubique de la même famille.

(Capitaine E. Barisien.)

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX. — 4622-2-93

3e Année. N° 7. Avril 1893.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

SUR LA THÉORIE DES COUPLES EN STATIQUE

par M. X. **Antomari**, Directeur des Études et professeur de Mathématiques spéciales à l'École Monge.

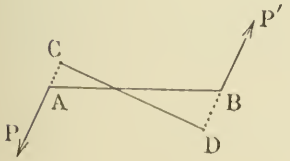
1. La théorie des couples imaginée par Poinsot a été longtemps bannie des programmes officiels. Elle figure maintenant au programme du baccalauréat ès sciences, mais elle y figure à une place où son utilité tout en étant bien manifeste est, me semble-t-il, un peu amoindrie. Le moment semble donc venu de lui restituer sa véritable place dans l'enseignement élémentaire de la statique. Je me propose de montrer, dans cette courte note, tout le parti que l'on peut en tirer pour l'exposition des premiers principes de la Statique, et notamment pour la démonstration des deux théorèmes fondamentaux relatifs à la composition de deux forces parallèles ou concourantes.

2. L'ordre habituellement suivi pour l'enseignement de la Statique est le suivant : Composition des forces appliquées en un point; composition de deux forces parallèles; couples, etc. Je pense, et j'espère montrer dans ce qui suit, qu'il y a avantage à commencer par l'étude des couples. On y gagne en simplicité; on y gagne en brièveté d'exposition et enfin on y aperçoit l'utilité, la raison d'être, devrais-je dire, de l'introduction en mécanique, de certains éléments qui étonnent les élèves et dont ils ne peuvent soupçonner l'importance que beaucoup plus tard : je veux parler des moments des forces.

3. Dans tout ce qui suit je suppose connues les notions préliminaires sur les forces, la composition des forces appliquées au même point et *dirigées suivant la même droite*, et enfin le théorème suivant :

Si à deux sommets opposés d'un losange solide on applique des forces égales dirigées soit suivant les côtés du losange soit en sens opposé, ces forces se font équilibre.

4. Cela posé, je rappelle qu'un *couple*, en mécanique, est un système de deux forces égales, parallèles et de sens contraires, appliquées aux deux extrémités d'une droite, mais non directement opposées.



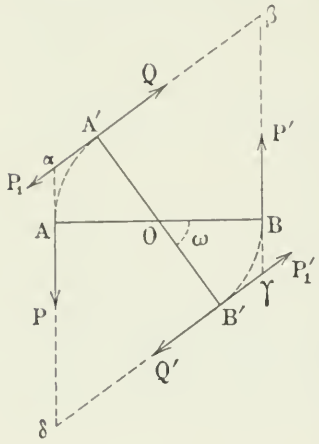
5. Sans changer l'intensité de ces forces, on peut les supposer appliquées en un point quelconque de leurs directions; si donc CD est une perpendiculaire commune aux deux forces, on peut les supposer appliquées respectivement en C et en D; ce qui revient à dire que l'on peut toujours supposer les deux forces perpendiculaires à la droite aux extrémités de laquelle elles agissent. La longueur de cette droite perpendiculaire commune aux deux forces s'appelle alors le *bras de levier* du couple; la valeur commune des deux forces s'appelle la force du couple. Un couple apparaît donc comme constitué par deux éléments : le bras de levier et la force. Il paraît naturel d'admettre que son effet sur un corps doit dépendre de ces deux éléments. Un examen plus attentif montre qu'il dépend d'un troisième élément.

6. Si l'on imagine en effet qu'un observateur soit debout sur le plan du couple, par rapport à cet observateur les deux forces du couple tendent à faire tourner le corps auquel elles sont appliquées soit

de droite à gauche, soit de gauche à droite. Ce sens de rotation est appelé *sens du couple*. Nous verrons que deux couples situés dans le même plan ou dans des plans parallèles et pour lesquels ces trois éléments sont respectivement égaux, peuvent être remplacés l'un par l'autre, autrement dit, sont *équivalents*.

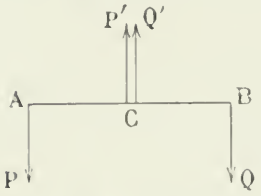
7. Il n'existe pas de couple si la force du couple est nulle; les deux forces du couple se font équilibre si le bras de levier est nul : on peut donc dire qu'un couple est *nul* soit quand la force est nulle, soit quand le bras de levier est nul. Il est naturel, d'après cela, de dire qu'un couple tend vers zéro quand l'un quelconque de ces deux éléments ou tous les deux tendent vers zéro.

8. Ces définitions étant données, il est aisé d'établir les principales propriétés des couples. La première de ces propriétés s'énonce ainsi : *On peut faire tourner un couple autour d'un point de son plan sans que l'état du corps, au point de vue des forces qui agissent sur lui, soit changé.*



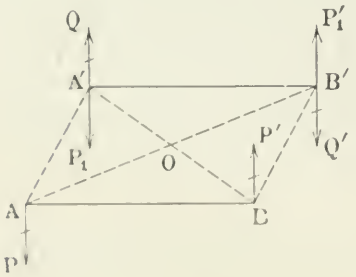
La démonstration classique de cette proposition est une application immédiate du théorème rappelé plus haut (**3**) et relatif à l'équilibre d'un losange solide. Soit, en effet, le couple (P.AB.) Par le point O milieu de AB menons A'B' = AB et partagée par le point O en deux parties égales. Rien ne sera changé à l'état du corps si nous appliquons en A' et en B' les forces P_1, Q, P'_1, Q' égales à P en intensité et deux à deux directement opposées. Or les forces égales P, Q, P', Q' sont appliquées aux sommets α et γ d'un losange αβγδ et se font équilibre ; on peut donc les supprimer et il reste alors un couple (P_1.A'B') qui n'est autre chose que le couple (P.AB) qu'on a fait tourner de l'angle ω autour du point O. La démonstration serait du reste la même si le point O était un point quelconque du plan du couple.

9. De cette proposition résulte immédiatement la suivante :
Deux forces égales, parallèles, et de même sens ont une résultante de même sens qu'elles, égale à leur somme et appliquée au milieu de la droite qui joint leurs points d'application.



On peut supposer les deux forces P et Q perpendiculaires sur la droite AB qui joint leurs points d'application. Tout revient alors à prouver que les deux forces P' et Q' égales à P et appliquées au milieu C de AB font équilibre aux forces P et Q. Or, cela devient évident si l'on fait tourner le couple (Q.BC) autour du point C, de manière que B vienne en A.

10. Maintenant, de la proposition que l'on vient de démontrer on peut conclure facilement *qu'un couple peut être transporté parallèlement à lui-même dans son plan ou dans tout plan parallèle.*



Soit en effet A'B' égale et parallèle à AB, de telle sorte que la figure ABA'B' est un parallélogramme de centre O. En A' et en B' appliquons les forces P_1, Q, P'_1, Q' égales à P et deux à deux opposées. P et Q' ont une résultante égale à 2P et appliquée en O; Q et P' ont aussi une résultante égale à 2P, appliquée en O et opposée à la première. Ces quatre forces P, Q', Q, P' se font donc équilibre et on peut les supprimer ; il reste alors un couple (P_1.A'B'), c'est-à-dire le couple AB transporté parallèlement à lui-même en A'B'.

11. Il suit évidemment de là qu'*un couple peut être déplacé à volonté dans son plan ou dans tout plan parallèle.*

Pour établir la possibilité du déplacement d'un couple *dans son plan*, la proposition n° 8 aurait suffi ; car une figure plane invariable peut toujours être amenée d'une position à une autre par une rotation autour d'un point convenablement choisi.

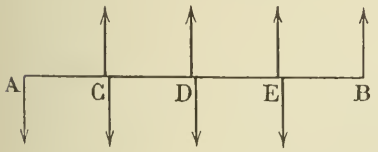
12. Les propositions qui précèdent justifient la définition suivante :

Deux couples situés dans le même plan ou dont les plans sont parallèles sont dits *égaux*, quand ils ont même sens de rotation, par rapport au même observateur, même force et même bras de levier.

La définition de l'égalité de deux couples, conduit à la comparaison des couples entre eux et par suite à la *mesure* des couples. Nous comparerons d'abord deux couples ayant le même bras de levier ; puis deux couples ayant la même force ; puis enfin deux couples quelconques. Quelques considérations préliminaires faciliteront la question tout en la rendant plus claire.

13. Imaginons que l'on partage le bras de levier AB d'un couple (P.AB) en n parties égales, quatre sur la figure.

En chacun des points de division appliquons deux forces opposées, égales et parallèles à P. Nous ne changeons rien à l'état du corps sur lequel le couple exerce son action; mais nous mettons en évidence n couples égaux, et le couple proposé est équivalent à ce système de n couples : on peut dire qu'il est égal à n fois l'un d'eux. Ainsi un couple peut être partagé en parties égales en laissant la force fixe et en partageant le bras de levier en parties égales.



14. On peut faire l'opération inverse, c'est-à-dire partager la force en n parties égales et laisser fixe le bras de levier : le couple sera encore partagé en parties égales. Pour rendre ceci bien évident, il suffit d'amener les couples qui composent (P.AB), dans la figure précédente, sur le couple (P.AC); on obtient ainsi un couple unique (4P.AC).

15. Comparons maintenant deux couples (P.AB) et (Q.AB) ayant même bras de levier et même sens de rotation. Supposons qu'une force f soit contenue q fois dans Q et p fois dans P. Le couple (P.AB) peut être décomposé en p couples (f.AB) et le second couple (Q.AB) en q couples (f. AB). On peut donc dire que le rapport des deux couples est égal au rapport $\frac{p}{q}$ des deux forces, et l'on peut écrire symboliquement

$$\frac{(P.AB)}{(Q.AB)} = \frac{P}{Q}.$$

Le cas où le rapport $\frac{P}{Q}$ est incommensurable se traite comme dans toutes les questions de mesure de grandeur. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

16. *Lorsque deux couples ont le même bras de levier, ils sont entre eux comme leurs forces.*

17. Par un raisonnement tout pareil on prouve que *deux couples qui ont la même force, sont entre eux dans le même rapport que leurs bras de levier.*

18. Sans insister davantage, on aperçoit tout de suite l'analogie de cette question, avec celle de la mesure des aires en géométrie. Nous pouvons donc énoncer sans démonstration les propositions suivantes :

I. — *Deux couples quelconques ayant même sens de rotation sont entre eux comme les produits de leurs forces par leurs bras de levier respectifs;*

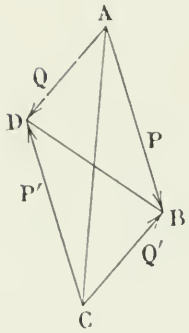
II. — *Si l'on prend pour unité de couple le couple dont le bras de levier est égal à l'unité de longueur et dont la force est égale à l'unité de force, le nombre qui mesure un couple est égal au produit du nombre qui mesure la force par le nombre qui mesure son bras de levier.*

Ce produit de la force d'un couple par son bras de levier s'appelle le *moment* du couple. On voit que sa valeur mesure en quelque sorte l'action du couple.

III. — *Un couple est équivalent à tout autre couple de même moment et de même sens de rotation.*

IV. — *Deux couples de même moment et dont les sens de rotation sont contraires se font équilibre.*

19. On déduit de III que l'on peut remplacer un couple quelconque (P.AB) par un autre dont le bras de levier est donné à l'avance; car si a est le nombre qui mesure le bras de levier, P le nombre qui mesure la force et x un nombre quelconque, on a



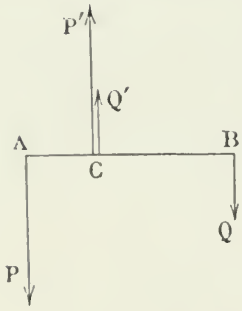
$$Pa = \left(\frac{Pa}{x}\right) \cdot x.$$

Si donc on veut que le bras de levier soit x, il suffira que la force soit égale à $\frac{Pa}{x}$.

Je vais appliquer ces considérations à la démonstration de la règle du parallélogramme des forces et à la composition des forces parallèles.

Je ne m'occuperai que de la première partie de la règle du parallélogramme des forces : *La résultante de deux forces appliquées au même point est dirigée suivant la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux forces.*

Soient P et Q les deux forces appliquées au point A sommet du parallélogramme ABCD construit sur ces deux forces. Tout revient à prouver que si l'on applique au point C les forces P′ et Q′ respectivement égales à P et à Q, il y a équilibre. Or, P et P′ forment un couple dont le moment peut être représenté par l'aire du paraléllogramme ABCD; Q et Q′ forment un second couple de même moment. Les sens de rotation des deux couples sont contraires, donc il y a équilibre, et par suite la résultante de P et de Q est dirigée suivant AC.



20. Pour les forces parallèles je me bornerai à deux forces parallèles et de même sens P et Q. Soit C le point de AB tel que

$$P \times AC = Q \times BC. \qquad (1)$$

Tout revient à prouver que les deux forces P′ et Q′ appliquées en C respectivement égales à P et à Q et de sens contraires, font équilibre aux forces P et Q. Mais cela résulte de ce que les deux couples (P.AC) et (Q.BC) ont des sens de rotation contraires et des moments égaux en vertu de (1).

NOTE RELATIVE AUX AXES D'UNE QUADRIQUE

On nomme *axe* d'une quadrique tout diamètre tel que le plan auquel il est conjugué lui soit perpendiculaire.

Tout axe ainsi défini est un axe de symétrie. Je me propose de montrer que la réciproque n'est pas vraie.

Considérons en effet une quadrique rapportée à trois axes rectangulaires. Pour que l'axe des x soit un axe de symétrie, il faut et il suffit que l'équation de cette quadrique ne change pas quand on change y en $-y$ et z en $-z$; en un mot il faut et il suffit que les équations

$$f(x, y, z) = 0, \qquad f(x, -y, -z) = 0$$

soient équivalentes. Ces équations développées étant

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz - 2B'zx - 2B''xy + 2Cx - 2C'y - 2C''z + D = 0,$$

on peut satisfaire aux conditions demandées de deux manières :

1° En supposant $$B' = B'' = C' = C'' = 0;$$

dans ce cas la surface a pour équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2Cx + D = 0$$

et, en général, l'axe Ox est alors un *axe* de la surface;

2° En supposant au contraire

$$A = A' = A'' = B = C = D = 0;$$

l'équation est alors réduite à $$B'zx + B''xy + C'y + C''z = 0,$$

et dans ce cas l'axe des x est bien un *axe de symétrie* mais non un *axe* de la quadrique.

Par exemple, l'équation $$xy + z = 0$$

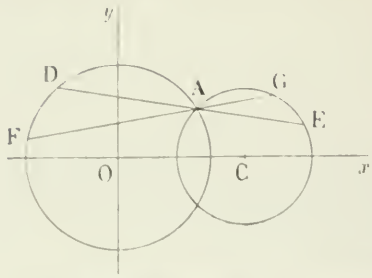
représente, en supposant les axes coordonnés rectangulaires, un paraboloïde hyperbolique équilatère : l'axe des z est l'*axe* du paraboloïde. Les axes Ox et Oy sont les génératrices rectilignes passant par le sommet; ces deux droites sont évidemment des *axes de symétrie* du paraboloïde, ce qui s'explique aisément en remarquant que par tout point M de la surface passent deux génératrices rectilignes dont l'une est la perpendiculaire abaissée de M sur l'axe des x et l'autre la perpendiculaire abaissée du même point M sur l'axe des y, de sorte que le point M′ symétrique de M par rapport à l'axe des x et le point M″ symétrique de M par rapport à l'axe des y sont sur le paraboloïde. Ainsi, le paraboloïde équilatère n'a qu'*un axe* et il possède *trois axes de symétrie* formant un trièdre trirectangle, ces axes de symétrie étant : l'axe de la surface et les deux génératrices rectilignes qui passent par son sommet.

(B. N.)

ÉCOLE CENTRALE (Concours de 1892).

Deuxième session.

210. — *On donne deux axes rectangulaires et un point* A *dont les coordonnées sont* p *et* q. *Par ce point on fait passer deux cercles, dont l'un a pour centre l'origine et l'autre un point* C *de l'axe des* x *dont l'abscisse est* a.



Par le point A *on mène deux sécantes* DAE, FAG *ayant une longueur commune donnée* 2l *(les points* D *et* F *sont sur l'une des circonférences; et les points* E *et* G *sont sur l'autre).*

1° Former l'équation générale des coniques Δ *passant par les points d'intersection des deux sécantes* DAE, FAG *avec l'axe des* y *et la parallèle à cet axe menée par le point* C.

2° Si l'on assujettit une des coniques Δ *à passer par un point* P *du plan, reconnaître le genre de cette conique d'après la position du point* P.

3° Déterminer le lieu du centre des coniques Δ.

4° En faisant varier l, *trouver le lieu du point de rencontre des cordes* DF, EG.

Les équations des cercles O et C sont respectivement

$$x^2 + y^2 = p^2 + q^2, \tag{1}$$

$$(x - a)^2 + y^2 = (p - a)^2 + q^2. \tag{2}$$

En désignant par α et β les cosinus directeurs de la sécante DAE, les coordonnées d'un point quelconque de cette droite peuvent s'écrire

$$x = p + \alpha\rho, \qquad y = q + \beta\rho; \tag{3}$$

et nous aurons les valeurs des segments $\overline{AD}$ et $\overline{AE}$ en remplaçant dans les équations (1) et (2) x et y par leurs valeurs (3), et en résolvant par rapport à ρ.

On obtient ainsi, en remarquant que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$,

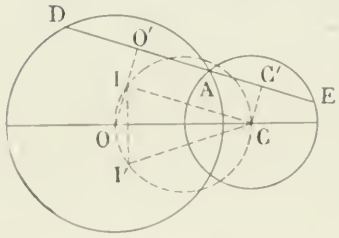
$$\overline{AD} = -2(p\alpha + q\beta). \qquad \overline{AE} = -2[(p - a)\alpha + q\beta];$$

et la longueur DE sera la valeur absolue de la différence de ces deux segments; on devra donc avoir

$$l^2 = a^2\alpha^2,$$

d'où l'on déduit $\alpha^2 = \dfrac{l^2}{a^2}$ et $\beta^2 = 1 - \alpha^2 = \dfrac{a^2 - l^2}{a^2}$.

Ces relations définissent deux droites passant par le point A de coefficients angulaires $\pm\sqrt{\dfrac{a^2 - l^2}{l^2}}$; ce sont les deux droites DAE et FAG; elles sont également inclinées sur les axes et ne sont réelles que si $l < a$.



Ce résultat peut s'obtenir par des considérations géométriques fort simples. Projetons, en effet, les points O et C sur la sécante DE en O' et C', et menons CI parallèle à DE.

On a $$CI = O'C' = \frac{DE}{2};$$

et le point I sera situé sur le cercle qui a pour diamètre OC.

Si l'on veut alors que DE soit égale à $2l$, on décrira du point C comme centre, avec un rayon égal à l, un cercle qui rencontrera le cercle de diamètre OC, en deux points I et I' symétriques par rapport à OC, et les droites cherchées DE et FG seront parallèles à CI et CI'. Le problème n'est possible que si $l < a$.

Les coefficients angulaires de ces deux droites sont égaux et de signe contraire, et leur valeur absolue est égale à la tangente de l'angle ICO dont le cosinus égale $\frac{CI}{CO}$ ou $\frac{l}{a}$; ces coefficients sont donc $\pm \frac{\sqrt{a^2 - l^2}}{l}$.

1° L'équation de l'ensemble des deux droites DE et FG sera

$$(a^2 - l^2)(x - p)^2 - l^2(y - q)^2 = 0,$$

et l'équation générale des coniques Δ pourra s'écrire

$$(a^2 - l^2)(x - p)^2 - l^2(y - q)^2 + \lambda x(x - a) = 0. \qquad (4)$$

Ces coniques ont leurs axes parallèles aux axes de coordonnées.

2° Soient x_0, y_0 les coordonnées du point P; en écrivant que l'équation (4) est satisfaite par les coordonnées de ce point, on obtient

$$\lambda = -\frac{(a^2 - l^2)(x_0 - p)^2 - l^2(y_0 - q)^2}{x_0(x_0 - a)};$$

on détermine ainsi une seule conique du faisceau. Pour avoir le genre de cette conique, calculons le discriminant de l'ensemble des termes du second degré,

$$\delta = -l^2[a^2 - l^2 + \lambda],$$

ou en remplaçant λ par la valeur écrite plus haut,

$$\delta = \frac{l^2[(a^2 - l^2)(x_0 - p)^2 - l^2(y_0 - q)^2 - (a^2 - l^2)x_0(x_0 - a)]}{x_0(x_0 - a)}.$$

La conique qui passe par le point P sera donc une ellipse si l'on a

$$x_0(x_0 - a)[(a^2 - l^2)(x^0 - p)^2 - l^2(y_0 - q)^2 - (a^2 - l^2)x_0(x_0 - a)] > 0 \qquad (5)$$

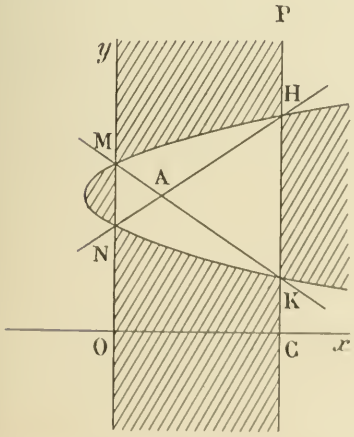
et une hyperbole si le premier membre est négatif.

Construisons les courbes qui ont pour équations

$$x = 0, \qquad x - a = 0,$$

$$(a^2 - l^2)(x - p)^2 - l^2(y - q)^2 - (a^2 - l^2)x(x - a) = 0.$$

Les deux premières sont les droites Oy et CH, la seconde est la parabole du faisceau (4); elle passe donc par les quatre points H, K, M, N, intersections de Oy et CH avec DE et FG. Cette parabole se réduit d'ailleurs à deux droites parallèles si le point A est équidistant de Oy et de CH.



En remplaçant dans l'inégalité (5) x_0, y_0 par les coordonnées p, q du point A, on obtient dans le premier membre

$$-(a^2 - l^2)p^2(p - a)^2,$$

résultat négatif. Il en résulte que le point A est dans la région du plan par où passent des hyperboles, ce qui était d'ailleurs évident *a priori* puisque la conique qui passe au point A se compose précisément des droites NH et MK.

Il résulte de là que si le point P se trouve dans les régions du plan couvertes de hachures, la conique qui passe en ce point est une ellipse; si le point P se trouve dans les autres régions la conique est une hyperbole. Si le point P est sur la parabole, la conique cherchée est précisément cette parabole; enfin si le point P est sur l'une des droites Oy ou CH, la conique se réduit à ces deux droites parallèles.

3° Les coordonnées du centre de la conique (4) sont données par les équations

$$2(a^2 - l^2)(x - p) + \lambda(2x - a) = 0,$$

$$- l^2(y - q) = 0.$$

Le lieu du centre est donc la droite $y - q = 0$, c'est-à-dire la parallèle à Ox passant par le point A.

Ce résultat pouvait se prévoir, car cette droite joignant les milieux des deux cordes parallèles MN et HK, est un diamètre commun à toutes les coniques (4) et par suite est le lieu de leurs centres.

4° Transportons l'origine des coordonnées au point A; les équations des cercles deviennent

$$x^2 + y^2 + 2px + 2qy = 0,$$

$$x^2 + y^2 + 2(p - a)x + 2qy = 0.$$

Soit $ux + vy - 1 = 0$ l'équation de la droite DF; je forme l'équation des droites AD et AF, on a ainsi

$$x^2 + y^2 + (2px + 2qy)(ux + vy) = 0,$$

et j'écris que cette équation représente les mêmes droites que l'équation

$$(a^2 - l^2)x^2 - l^2y^2 = 0.$$

On obtient

$$\frac{1 + 2pu}{a^2 - l^2} = \frac{1 + 2qv}{- l^2},$$

$$pv + qu = 0.$$

Ces équations donnent u et v, et l'équation de la droite DF peut s'écrire

$$a^2(px - qy) - 2a^2q^2 + 2l^2(p^2 + q^2) = 0.$$

En changeant p en $p - a$, on aura l'équation de la droite GE :

$$a^2[(p - a)x - qy] - 2a^2q^2 + 2l^2[(p - a)^2 + q^2] = 0,$$

et l'équation du lieu du point de rencontre de ces droites s'obtient en éliminant l^2 entre ces deux équations, ce qui donne

$$\frac{px - qy - 2q^2}{p^2 + q^2} = \frac{(p - a)x - qy - 2q^2}{(p - a)^2 + q^2};$$

c'est l'équation d'une droite qui passe par le point $(0, -2q)$, c'est-à-dire par le deuxième point de rencontre des deux cercles.

Charles Braillion, lycée d'Amiens.

Ont résolu la même question : MM. H. Brillier, lycée de Nantes; J. Hais, à Etampes; J. Vandier, soldat au 113e d'infanterie, à Saint-Maixent.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

167. — *Trouver le lieu du centre* ω *du cercle passant par le centre* O *d'une hyperbole équilatère et tangent à cette hyperbole au point mobile* M.

Soit
$$x^2 - y^2 - a^2 = 0$$
l'équation de l'hyperbole équilatère rapportée à ses axes.

Si α, β sont les coordonnées d'un point du lieu, l'équation du cercle qui a ce point pour centre et qui passe par l'origine peut s'écrire
$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0.$$

On aura l'équation du lieu en écrivant que ces deux courbes sont tangentes. Nous écrirons pour cela que l'équation en λ relative à ces deux coniques a une racine double.

En annulant le discriminant de la fonction
$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \lambda(x^2 - y^2 - a^2),$$
on obtient l'équation
$$a^2\lambda^3 + \lambda(\alpha^2 - \beta^2 - a^2) - (\alpha^2 + \beta^2) = 0;$$
et pour que cette équation ait une racine double, il faut que l'on ait
$$4(\alpha^2 - \beta^2 - a^2)^3 + 27a^2(\alpha^2 + \beta^2)^2 = 0;$$
ce qui montre que le lieu est une courbe du sixième degré symétrique par rapport aux deux axes.

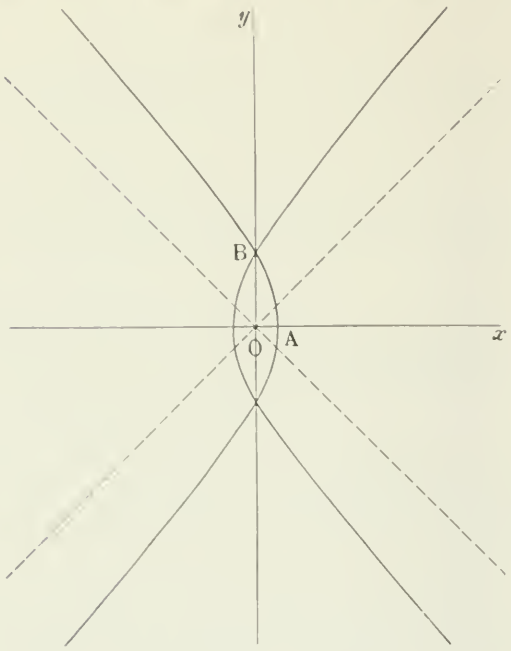
Pour la construire, passons en coordonnées polaires; en remplaçant α par $\rho\cos\omega$ et β par $\rho\sin\omega$, on obtient
$$4(\rho^2\cos 2\omega - a^2)^3 = -27a^2\rho^4$$
ou, en extrayant la racine cubique,
$$\sqrt[3]{4}(\rho^2\cos 2\omega - a^2) = -3a^{\frac{2}{3}}\rho^{\frac{4}{3}}.$$

Si l'on pose
$$\rho^{\frac{2}{3}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{z\sqrt[3]{4}},$$
l'équation peut s'écrire
$$z^3 - \frac{3}{4}z - \frac{\cos 2\omega}{4} = 0,$$
et l'on sait que cette équation a pour racines $\cos\frac{2\omega}{3}$, $\cos\frac{2\omega + 2\pi}{3}$ et $\cos\frac{2\omega + 4\pi}{3}$.

L'équation proposée est donc équivalente aux trois équations suivantes
$$\rho = \frac{a}{2\cos^{\frac{3}{2}}\frac{2\omega}{3}}.$$
$$\rho = \frac{a}{2\cos^{\frac{3}{2}}\frac{2\omega + 2\pi}{3}},$$
$$\rho = \frac{a}{2\cos^{\frac{3}{2}}\frac{2\omega + 4\pi}{3}}.$$

Ces trois équations représentent la même courbe. Il suffira de considérer l'une d'elles; nous prendrons la première,
$$\rho = \frac{a}{2\cos^{\frac{3}{2}}\frac{2\omega}{3}}.$$

On aura toute la courbe en faisant varier ω dans un intervalle de 6π ; mais en changeant ω en $3\pi + \omega$, ρ ne change pas; la courbe est donc symétrique par rapport au pôle, et, comme le signe $\pm$, sous-entendu devant le second membre, nous donne déjà cette symétrie, il suffira de faire varier ω dans un intervalle de 3π. Enfin, en changeant ω en $-\omega$, ρ ne change pas; la courbe est donc symétrique par rapport à l'axe polaire. Tout revient donc à faire varier ω entre 0 et $\frac{3\pi}{2}$, et à prendre le symétrique de la branche de courbe obtenue par rapport aux deux axes.



Pour que ρ soit réel, il faut que $\cos\frac{2\omega}{3}$ soit positif, c'est-à-dire que $\omega < \frac{3\pi}{4}$.

Quand ω varie de 0 à $\frac{3\pi}{4}$, $\cos\frac{2\omega}{3}$ décroît de 1 à 0 et, par suite, la valeur positive de ρ croît de $\frac{a}{2}$ à $+\infty$. On voit aisément que la branche de courbe est parabolique, puisque la dérivée de $\frac{1}{\rho}$ est nulle pour $\omega = \frac{3\pi}{4}$.

On a $OA = a$, $OB = a\sqrt{2}$, et la tangente au point A est perpendiculaire à Ox.

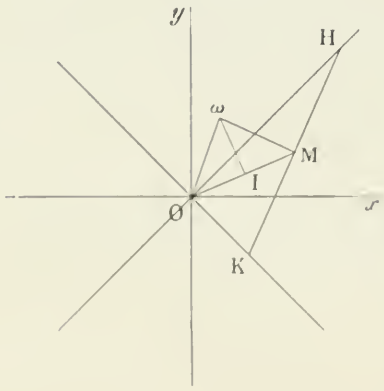
Remarque. — Cette courbe est unicursale; en effet, le centre ω d'un cercle tangent à l'hyperbole en M s'obtient en prenant l'intersection de la normale en M à l'hyperbole et de la perpendiculaire menée à OM en son milieu I. Les coordonnées du point ω sont donc fonctions rationnelles de celles du point M, et comme ces dernières peuvent s'exprimer rationnellement en fonction d'un paramètre, il en sera de même des coordonnées du point ω.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Cette construction du centre ω du cercle permet d'obtenir simplement l'équation du lieu.

Soient ρ_1, θ_1, les coordonnées polaires du point M, ρ et θ celles du point ω. Calculons ρ et θ en fonction de ρ_1 et θ_1.

Désignons par H et K les points de rencontre de la tangente en M avec les asymptotes. On a



$$\widehat{MOK} = \theta_1 + \frac{\pi}{4},$$

et, comme le triangle OMK est isocèle,

$$\widehat{OMK} = \pi - 2\left(\theta_1 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 2\theta_1 .$$

Cet angle $\widehat{OMK}$ est égal à l'angle $I\omega M$: ils ont leurs côtés perpendiculaires; par suite, $\widehat{\omega OI} = 2\theta_1$ et $\theta = 3\theta_1$.

De plus, $$OI = O\omega \cos 2\theta_1$$

$$\rho_1 = 2\rho \cos 2\theta_1.$$

On a donc $$\theta_1 = \frac{\theta}{3}, \qquad \rho_1 = 2\rho \cos\frac{2\theta}{3},$$

et comme l'équation de l'hyperbole est $\rho_1^2 = \dfrac{a^2}{\cos 2\theta_1}$,

l'équation du lieu du point ω sera $4\rho^2 \cos^2 \dfrac{2\theta}{3} = \dfrac{a^2}{\cos \dfrac{2\theta}{3}}$,

ou
$$\rho^2 = \frac{a^2}{4 \cos^3 \dfrac{2\theta}{3}}.$$

L. Augé, à Toulouse.

Ont résolu la même question : MM. Audibert, à Marseille; Auzeram, à Toulouse; E. N. Barisien; E. Bourrienne, à Rouen; Armand Cahen, étudiant à la Sorbonne; A. Duhameaux, lycée d'Amiens; E. Faucillon, collège Chaptal.

---

196. — *Trouver le lieu des points tels qu'en menant des normales à une cardioïde, la somme des inverses des rayons vecteurs joignant le point de rebroussement aux pieds des normales soit constante.*

Soit
$$\rho = R \cos \omega + R$$
l'équation de la cardioïde en coordonnées polaires, ou en coordonnées cartésiennes
$$(x^2 + y^2)^2 - 2Rx(x^2 + y^2) - R^2y^2 = 0.$$

Les coordonnées du pied d'une normale issue du point $P(x_0, y_0)$ vérifient l'équation
$$\frac{x_0 - x}{(x^2 + y^2)(2x - R) - 2Rx^2} = \frac{y_0 - y}{2y(x^2 + y^2) - 2Rxy - R^2y}$$
ou, en ordonnant,
$$2(x^2 + y^2)(x_0y - y_0x) + Rxy(R - 2x_0) + R(2x^2y_0 - Ryx_0) - R(y - y_0)(x^2 + y^2) = 0.$$

Transformons cette équation en coordonnées polaires :
$$2\rho^2(x_0 \sin \omega - y_0 \cos \omega) + R\rho \sin \omega \cos \omega(R - 2x_0) + R(2\rho y_0 \cos^2 \omega - Rx_0 \sin \omega) - R(\rho \sin \omega - y_0)\rho = 0.$$

En remplaçant $\cos \omega$ par $\dfrac{\rho - R}{R}$, on trouve
$$\sin \omega = \frac{\rho y_0(2\rho - 3R)}{Rx_0(2\rho - R) - R^2\rho}.$$

Par conséquent, l'équation ayant pour racines les distances du point de rebroussement aux pieds des normales est
$$\left(\frac{\rho - R}{R}\right)^2 + \frac{\rho^2 y_0^2(2\rho - 3R)^2}{[Rx_0(2\rho - R) - R^2\rho]^2} = 1,$$
ou, sous forme entière et en mettant x et y au lieu de x_0 et y_0, et en divisant par ρ,
$$(\rho - 2R)[x(2\rho - R) - R\rho]^2 + \rho y^2(2\rho - 3R)^2 = 0.$$

Le coefficient de ρ est égal à $9R^2(x^2 + y^2) - 4R^3x$;

le terme constant est égal à $-2R^3x^2$;

donc
$$\sum \frac{1}{\rho} = \frac{9(x^2 + y^2) - 4Rx}{2Rx^2}.$$

En désignant par $\dfrac{1}{h}$ une constante, l'équation du lieu est donc
$$(9h - 2R)x^2 + 9hy^2 - 4Rhx = 0.$$

Le lieu est donc une conique passant par l'origine et normale en ce point à la tangente de rebroussement qui est un axe de symétrie.

A. Duhameaux. — Ch. Braillion (Lycée d'Amiens).

---

204. — *On donne un cercle* C *et une direction fixe* Δ. *On prend sur une tangente au cercle à partir du point de contact un segment de longueur constante* a. *Lieu de la projection de l'extrémité de ce segment sur la parallèle à* Δ *menée par le point de contact.*

Prenons des axes de coordonnées rectangulaires au centre du cercle C de rayon R, l'axe des x étant parallèle à la direction Δ.

Soit M le point de contact d'une tangente au cercle et φ l'angle que fait le rayon aboutissant au point M avec l'axe des x. Si x et y sont les coordonnées du point du lieu correspondant au point M, on a

$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos\varphi \pm a\sin\varphi \\ y &= R\sin\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Le signe + est relatif à la longueur a portée dans un sens, le signe —, à la longueur a portée dans l'autre sens.

De ces deux équations (1), on déduit

$$\sin\varphi = \frac{y}{R}, \qquad \cos\varphi = \frac{Rx \mp ay}{R^2}.$$

Par suite, en éliminant φ, on trouve

$$\frac{y^2}{R^2} + \frac{(Rx \mp ay)^2}{R^4} = 1$$

ou

$$R^2x^2 + (R^2 + a^2)y^2 \mp 2aRxy - R^4 = 0. \qquad (2)$$

Le lieu demandé se compose donc de deux ellipses égales également inclinées sur les axes et passant toutes deux par les points de rencontre du cercle C avec l'axe des x. Elles coupent l'axe des y aux mêmes points. Elles sont tangentes aux droites $y = \pm R$, c'est-à-dire aux tangentes au cercle parallèles à l'axe des x.

Remarque. — On sait que l'aire de l'ellipse définie par l'équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F = 0$$

a pour expression

$$U = \frac{\pi F}{\sqrt{AC - B^2}}.$$

Or, ici

$$F = -R^4, \qquad AC - B^2 = R^4.$$

Il en résulte donc que l'aire a pour valeur

$$U = \pi R^2.$$

Donc, en faisant varier la longueur a, tous les lieux obtenus sont des ellipses ayant une aire constante et égale à celle du cercle C.

E.-N. Barisien.

Ont résolu la même question :

MM. Audibert (Marseille) ; A. Bailly (lycée de Lyon) ; B. Denain (Rouen) ; L. Espinat (instituteur à Espinchal) ; E. Gueden (lycée Saint-Louis) ; H. Lambert (Alger) ; J. Marchal (89e de ligne, à Courbevoie) ; A. Morel (ingénieur au Creusot) ; Démètre Simianescu (sous-lieutenant de l'armée roumaine) ; J. Vandier (113e de ligne à Saint-Maixent) ; P. Vidal (école La Martinière, Lyon).

207. — *Étant donné un ellipsoïde, s'il y a un système de trois plans diamétraux conjugués coupant la surface suivant des ellipses ayant des aires égales entre elles et à une aire donnée* S^2, *il y en a une infinité.*

Soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ l'équation de l'ellipsoïde, rapporté à ses axes; posons $S^2 = \pi h^2$.

Menons par le centre les normales à tous les plans diamétraux qui détachent dans l'ellipsoïde une aire πh^2; il est facile de démontrer (voir par exemple N.A. 1843, p. 92) que le lieu de ces normales, est le cône ayant pour équation

$$\sum x^2 \left(\frac{1}{h^4} - \frac{1}{b^2c^2}\right) = 0. \tag{1}$$

On trouvera que l'enveloppe des plans diamétraux qui détachent une aire πh^2 est

$$\sum x^2 \left(\frac{1}{h^4} - \frac{1}{a^2c^2}\right)\left(\frac{1}{h^4} - \frac{1}{a^2b^2}\right) = 0. \tag{2}$$

Si par la transformation $x = \xi$, $y = \frac{b}{a}\eta$, $z = \frac{c}{a}\zeta$, nous changeons l'ellipsoïde donné en la sphère dont l'équation est

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = a^2;$$

les plans diamétraux conjugués considérés de l'ellipsoïde deviendront trois plans rectangulaires deux à deux passant par le centre de la sphère, et le cône représenté par l'équation (2) deviendra le cône dont l'équation est

$$\sum a^2\xi^2 \left(\frac{1}{h^4} - \frac{1}{a^2b^2}\right)\left(\frac{1}{h^4} - \frac{1}{a^2c^2}\right) = 0. \tag{3}$$

Or l'on sait que si l'on peut mener à ce cône trois plans tangents rectangulaires deux à deux, on le peut d'une infinité de manières.

Il en résulte que la proposition est démontrée.

Remarque. — On démontre facilement que, pour que le cône (3) puisse avoir trois plans tangents rectangulaires deux à deux (N. A. 1866, p. 105), il faut que l'on ait

$$\left(\frac{1}{h^4} - \frac{1}{b^2c^2}\right)\left(\frac{1}{h^4} - \frac{1}{c^2a^2}\right)\left(\frac{1}{h^4} - \frac{1}{a^2b^2}\right)\left(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 - 3h^4\right) = 0.$$

Si nous supposons $a > b > c$, on en déduit que lorsque S^2 est égal soit à πac, soit à $\pi\sqrt{\frac{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}{3}}$, on peut mener à l'ellipsoïde considéré une infinité de plans diamétraux conjugués qui aient tous les trois S^2 pour surface de section dans l'ellipsoïde.

E. Lemoine.

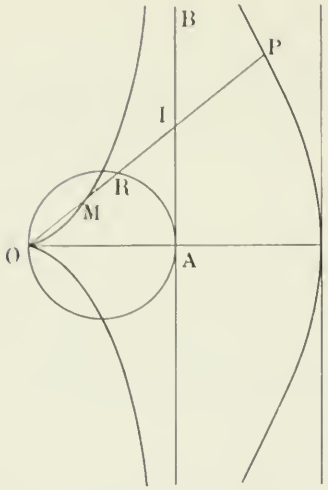
Extrait d'une lettre de M. E. Lemoine.

Je ne vous envoie pas la solution de la question 206, ce n'est pas la peine; elle se traite directement en prenant les tangentes sous la forme $y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ et ne présente d'autres particularités que celle-ci : les calculs qui semblent se présenter comme fort compliqués se simplifient bientôt d'une façon remarquable. C'est un joli exercice. *E. L.*

Nous n'avons, jusqu'ici, reçu aucune solution de cette question. (B. N.)

---

209. — *Etant donnée une cissoïde de Dioclès ayant pour point double le point* O *et pour asymptote la droite* AB, *on joint le point double* O *à un point* M *de la cissoïde ; la droite* OM *rencontre* AB *en* I *et l'on prend* IP = IM. *Trouver l'aire comprise entre la cissoïde et la courbe lieu du point* P.



O étant le pôle et a le diamètre du cercle générateur, l'équation de la cissoïde est

$$\rho = a\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}.$$

Mais $\quad OI = \dfrac{a}{\cos\theta}, \qquad MI = OR = a\cos\theta;$

donc, en posant OP = R,

$$R = a\frac{1+\cos^2\theta}{\cos\theta}$$

est l'équation du lieu de P.

La surface cherchée

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (R^2 - \rho^2)d\theta = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\cos^2\theta)^2 - \sin^4\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta,$$

ou, en simplifiant,

$$S = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 2\pi a^2.$$

La surface cherchée est donc égale à 8 fois la surface du cercle donné.

(Audibert, à Marseille.)

Ont envoyé des solutions exactes : MM. Bailly (Dijon); H. Chéronnet (Condorcet); L. Graux (Nantes); Morel (au Creusot); Ch. Turchi (à Ferrare); J. Vandier (Saint-Maixent).

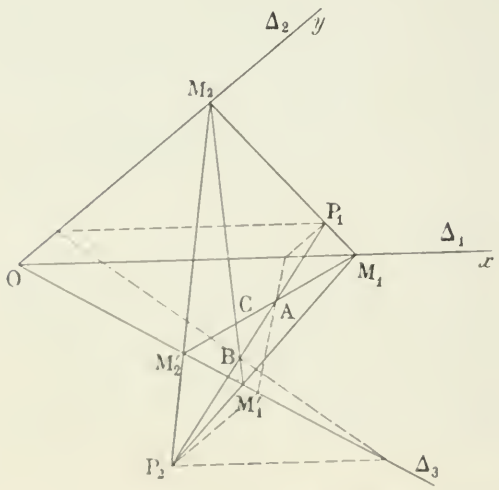
---

214. — Δ_1, Δ_2, Δ_3 *sont trois droites concourantes*, P_1, P_2 *deux points fixes. Une droite* Δ *mobile autour de* P_1 *rencontre* Δ_1, Δ_2 *aux points* M_1, M_2; *les droites* P_2M_1, P_2M_2 *coupent* Δ_3 *en* M_1', M_2. *On demande l'enveloppe des droites* M_1M_2', M_2M_1' *et le lieu de leur point de rencontre.*

Prenons pour axes les deux droites Δ_1 et Δ_2. Soient

$$y = mx,$$

l'équation de la droite Δ_3 et (α, β), (α_1, β') les coordonnées des points P_1 et P_2.



Une droite quelconque Δ passant par le point P_1 a pour équation

$$y - \beta = \lambda(x - \alpha);$$

elle rencontre les axes au point M_1 d'abscisse $\dfrac{\lambda\alpha - \beta}{\lambda}$, et au point M_2 d'ordonnée $\beta - \lambda\alpha$.

Par suite, l'équation de P_2M_1 peut s'écrire

$$\frac{y}{\beta'} = \frac{\lambda(x-\alpha)+\beta}{\lambda(\alpha'-\alpha)+\beta};$$

celle de P_2M_2 est de même

$$\frac{x}{\alpha'} = \frac{y-\beta+\lambda\alpha}{\beta'-\beta+\lambda\alpha}.$$

M_1M_2' est une droite qui passe par le point de rencontre de Δ_3 et de la droite P_2M_2 ; son équation est donc de la forme

$$\mu(y - mx) + [\alpha'(y - \beta + \lambda\alpha) - x(\beta' - \beta + \lambda\alpha)] = 0. \qquad (1)$$

Écrivons qu'elle passe par le point M_1; on a

$$-\mu m(\lambda\alpha - \beta) + [\alpha'(\lambda\alpha - \beta)\lambda - (\lambda\alpha - \beta)(\beta' - \beta + \lambda\alpha)] = 0,$$

ou, en supprimant le facteur $\lambda\alpha - \beta$,

$$\mu = \frac{\lambda(\alpha' - \alpha) - (\beta' - \beta)}{m}.$$

Portant cette valeur dans l'équation (1), nous aurons pour l'équation de la droite M_1M_2',

$$[\lambda(\alpha' - \alpha) - (\beta' - \beta)](y - mx) + m\alpha'(y - \beta + \lambda\alpha) - mx(\beta' - \beta + \lambda\alpha) = 0$$

ou, en mettant le facteur λ en évidence,

$$\lambda[(\alpha' - \alpha)y - m\alpha'x + m\alpha\alpha'] - (\beta' - \beta)y + m\alpha'(y - \beta) = 0. \qquad (1)$$

Cela montre que cette droite passe par un point fixe A situé à l'intersection des deux droites

$$(\alpha' - \alpha)y - m\alpha'(x - \alpha) = 0,$$
$$(\beta' - \beta)y - m\alpha'(y - \beta) = 0.$$

De ces deux équations on déduit que le point A se trouve sur la droite

$$\frac{y - \beta}{x - \alpha} = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha},$$

c'est-à-dire la droite P_1P_2, ce qui s'explique aisément en remarquant que la droite P_1P_2 est une position particulière de la droite M_1M_2', correspondant au cas où M_1M_2 coïncide avec P_1P_2.

On peut alors construire aisément ce point A en supposant que la droite M_1M_2 est parallèle à Δ_2.

On verrait de même que la droite M_2M_1' passe par un point fixe B également situé sur la droite P_1P_2.

L'équation de la droite M_2M_1' peut d'ailleurs s'écrire

$$\lambda[(x - \alpha)\beta' - mx(\alpha' - \alpha)] - \beta'(y - \beta) + mx(\beta' - \beta) = 0. \qquad (2)$$

On aura le lieu du point de rencontre des droites M_1M_2' et M_2M_1' en éliminant λ entre les équations (1) et (2), ce qui donne

$$\frac{(\alpha' - \alpha)y - m\alpha'(x - \alpha)}{(x - \alpha)\beta - mx(\alpha' - \alpha)} = \frac{(\beta' - \beta)y - m\alpha'(y - \beta)}{(y - \beta)\beta' - mx(\beta' - \beta)},$$

ou, en développant,

$$(\alpha' - \alpha)(y - \beta)(\beta'y - m^2\alpha'x) = (\beta' - \beta)(x - \alpha)(\beta'y - m^2\alpha'x),$$
$$[(\alpha' - \alpha)(y - \beta) - (\beta' - \beta)(x - \alpha)][\beta'y - m^2\alpha'x] = 0.$$

Le premier facteur égalé à zéro est l'équation de la droite P_1P_2, c'est une solution singulière correspondant au cas où la droite M_1M_2 coïncide avec P_1P_2.

Le véritable lieu est donc la droite qui a pour équation

$$\beta'y - m^2\alpha'x = 0;$$

c'est une droite passant par le point O et qui est indépendante de la position du point P_1.

Capitaine E. N. Barisien.

Solution géométrique. — Imaginons une seconde position de la sécante M_1M_2; soit m_1m_2 et désignons par m_1' et m_2' les points de rencontre de P_2m_1 et P_2m_2 avec Δ_3. Les deux triangles $M_1M_2M_2'$ et $m_1m_2m_2'$ ont leurs côtés deux à deux sur trois droites concourantes; ils sont donc homologiques, par suite les côtés correspondants se coupent en trois points en ligne droite; M_1M_2' et m_1m_2' se rencontrent donc en un point A situé sur P_1P_2, et si l'on suppose que m_1m_2 reste fixe, on voit que M_1M_2' passera constamment par le point A. On verrait de même que M_2M_1' passe par un point fixe B, également situé sur P_1P_2.

Enfin, en désignant par C le point de rencontre de $M_1M'_2$ et $M_2M'_1$, par c celui de $m_1m'_2$ et $m_2m'_1$, les deux triangles $M_1M'C$ et $m_1m'_1c$ sont homologiques parce que leurs côtés se rencontrent deux à deux en trois points A, B, P_2 en ligne droite. Par suite les sommets sont deux à deux sur trois droites concourantes, ce qui montre que la droite Cc passe par le point O, c'est-à-dire que le lieu du point C est une droite passant par le point O.

H. Chéronnet (Condorcet).

Autres solutions analytiques et géométriques par MM. A. Bailly, à Dijon; Paul Begou, lycée de Marseille; A. Braillion, lycée d'Amiens; H. Brivet, lycée de Nantes; Félix Dutecq, lycée de Toulouse; H. Gaubry; J. Hais, à Étampes; Eugène Lequintrec, lycée de Toulouse; A. Marmion, lycée de Moulins; C. Rau, Condorcet; J. Vandier, soldat au 114e de ligne à Saint-Maixent.

QUESTIONS PROPOSÉES

260. — Étant donnés deux plans P, P′ et deux droites, Δ, Δ′; trouver le lieu des points dont le rapport des distances à Δ et Δ′ est constant, ces distances étant comptées parallèlement aux plans P et P′ respectivement. Le lieu est une quadrique.

2° Quelles sont les quadriques susceptibles de ce mode de génération avec des éléments réels? Une quadrique de cette espèce étant donnée, trouver les droites Δ, Δ′ et les plans P, P′ correspondants.

261. — Étant donnée une famille de coniques homofocales : 1° Trouver l'enveloppe des polaires d'un point fixe P par rapport à ces coniques; 2° Trouver la polaire réciproque de l'hyperbole d'Apollonius relative à P et à l'une de ces coniques, prise pour conique directrice; 3° Enveloppe des normales telles que les tangentes aux points d'incidence passent par P. On doit trouver la même courbe dans les trois cas. Expliquer pourquoi.

262. — On considère une famille de coniques homofocales. Lieu des foyers de l'hyberbole d'Apollonius relative à un point fixe P et à l'une quelconque des coniques de la famille.

263. — 1° Le lieu des centres des coniques passant par le sommet d'un angle droit, dont les foyers se déplacent chacun sur un des côtés de cet angle et dont la somme des carrés des axes est constante se compose d'une hyperbole et d'un cercle;

2° Si au lieu de la somme des carrés des axes constante, c'est l'axe focal qui a une grandeur constante, le lieu des centres se compose de deux droites ;

3° Si c'est l'axe non focal qui a une grandeur constante, le lieu est une hyperbole équilatère.

(E.-N. Barisien.)

264. — Trouver le mouvement d'un point matériel attiré par une droite fixe proportionnellement à la distance et animé d'une vitesse initiale parallèle à cette droite.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

Paris — Imprimerie Chaix. — 7616-4-13.

3e Année. N° 8. Mai 1893.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

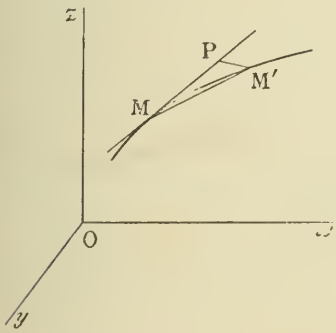
COMPOSANTES DE LA DÉVIATION

SUIVANT TROIS AXES RECTANGULAIRES

Soient x, y, z les coordonnées d'un point mobile M rapporté à trois axes rectangulaires; nous supposerons que x, y, z sont des fonctions continues du temps t, pourvues de dérivées:

$$x = f(t), \qquad y = f_1(t), \qquad z = f_2(t).$$

Le mobile étant en M à l'époque t et en M′ à l'époque $t + h$, si l'on porte sur la tangente, dans le sens du mouvement, une longueur $\overline{MP} = vh$, v étant la vitesse à l'époque t, on nomme déviation le segment $\overline{PM'}$. Proposons-nous de calculer la projection de $\overline{PM'}$ sur l'axe des x. On a



$$\text{pj}_x.\overline{PM'} = \text{pj}_x.\overline{MM'} - \text{pj}_x.\overline{MP}.$$

Or $\text{pj}_x.\overline{MM'} = \Delta x = f(t + h) - f(t) = hf'(t) + \dfrac{h^2}{1.2} f''(t + \theta h)$,

θ désignant un nombre compris entre 0 et 1;

ensuite, $$\text{pj}_x.\overline{MP} = h.\text{pj}_x v = h\frac{dx}{dt} = hf'(t);$$

donc $$\text{pj}_x.\overline{PM'} = \frac{h^2}{2} f''(t + \theta h).$$

Cette formule, qui est d'ailleurs encore légitime si les axes sont obliques, nous donne

$$\lim \frac{2}{h^2} \times \text{pj}_x.\overline{PM'} = f''(t) = \frac{d^2x}{dt^2};$$

d'où l'on conclut que $$\frac{2}{h^2}\overline{PM'}$$

a une limite, qui est un segment dont les composantes sont représentées par

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Mais d'autre part, les axes étant supposés rectangulaires, si l'on nomme α l'angle que la vitesse en M fait avec Ox, on a

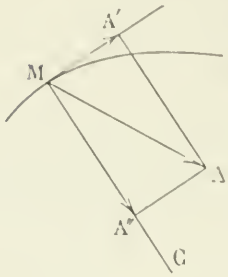
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}(v \cos\alpha) = \cos\alpha \frac{dv}{dt} + v.\frac{d\cos\alpha}{dt}.$$

En outre, en nommant $d\sigma$ la différentielle de l'arc de l'indicatrice sphérique,

$$\frac{d\cos\alpha}{dt} = \frac{d\cos\alpha}{d\sigma}.\frac{d\sigma}{ds}.\frac{ds}{dt} = \cos\alpha'.\frac{1}{R}.v,$$

R étant le rayon de courbure en M et α' l'angle que la normale principale en M fait avec Ox; ou

plus exactement α' étant l'angle que le segment $\overline{MC}$ fait avec Ox, C désignant le centre de courbure de la trajectoire, relatif au point M, de sorte que, en appelant de même β, γ les angles de la vitesse avec Oy et Oz, et β', γ' les angles de $\overline{MC}$ avec les mêmes axes :



$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\cos\alpha + \frac{v^2}{R}\cos\alpha',$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\cos\beta + \frac{v^2}{R}\cos\beta',$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\cos\gamma + \frac{v^2}{R}\cos\gamma'.$$

Ce qui montre que la limite de $\frac{2}{h^2}\overline{PM'}$ est un segment $\overline{MA}$ qui est la résultante de deux autres : MA dirigé suivant la tangente et égal à $\frac{dv}{dt}$, et $\overline{MA''}$ dirigé suivant la direction $\overline{MC}$ et égal à $\frac{v^2}{R}$.

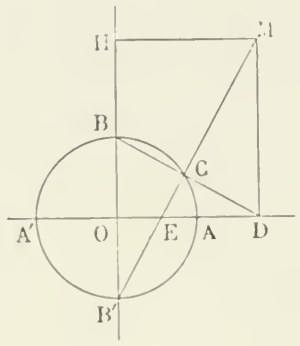
Dans une note précédente (R. tome II, page 29) nous avons appelé *accélération* la limite de la dérivée géométrique de la vitesse ; on voit que MA est précisément l'accélération γ, de sorte que l'on a encore

$$\lim \frac{2}{h^2}\overline{PM'} = \gamma.$$

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

213. — *Étant donnés un cercle et deux diamètres rectangulaires* AA', BB', *on prend un point quelconque* C *sur le cercle et l'on mène les droites* BC, B'C *qui coupent* AA' *en* D *et* E. *Par ces points on mène des parallèles à* BB'. *Lieu des points de rencontre de ces parallèles avec* BC *et* B'C.

Prenons AA' pour axe des x, BB' pour axe des y; soient R le rayon du cercle, x_0, y_0 les coordonnées du point C, qui satisfont à la relation



$$x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0. \qquad (1)$$

La droite BC ayant pour équation

$$\frac{y - R}{x} = \frac{y_0 - R}{x_0},$$

la perpendiculaire au point D à la droite AA' s'en déduit en faisant $y = 0$; on a ainsi

$$-\frac{R}{x} = \frac{y_0 - R}{x_0}. \qquad (2)$$

Enfin, l'équation de B'C peut s'écrire

$$\frac{y + R}{x} = \frac{y_0 + R}{x_0}. \qquad (3)$$

On aura le lieu du point M en éliminant x_0 et y_0 entre les équations (1), (2) et (3). Multiplions membre à membre les équations (2) et (3); il vient

$$\frac{-R(y + R)}{x^2} = \frac{y_0^2 - R^2}{x_0^2} = -1$$

ou

$$x^2 - Ry - R^2 = 0.$$

Cette équation représente une parabole ayant pour sommet le point B′, pour axe la droite BB′, et pour paramètre $\frac{R}{2}$.

Le lieu du point de rencontre de BC avec la perpendiculaire menée en E à AA′ se déduit du lieu précédent en changeant R en $-R$, ce qui donne la parabole symétrique de la précédente par rapport à AA′.

Solution géométrique. — Abaissons MH perpendiculaire sur BB′, les deux triangles MB′H et BOD ont leurs côtés perpendiculaires; ils sont semblables et l'on peut écrire

$$\frac{MH}{HB'} = \frac{OB}{OD}$$

ou

$$\overline{MH}^2 = R.\,HB',$$

ce qui donne le lieu du point M.

André Gilbert, lycée d'Orléans.

Autres solutions par MM. Bailly, lycée de Dijon; E. N. Barisien; Bassal, lycée de Toulouse; Paul Berger, lycée de Marseille; C. Bergman, H. Brélivet, lycée de Nantes; Ch. Braillion, lycée d'Amiens; H. Chéronnet, Condorcet; Duhameaux, lycée d'Amiens; J. Fitte, lycée de Toulouse; A. Gourichon, étudiant à Poitiers; Louis Graux, lycée de Nantes; E. Gueden, lycée Saint Louis; J. Hais, à Etampes; Eugène Lequintre, lycée de Toulouse; H. Loiseau, lycée d'Orléans; Pellissier.

---

215. — *On considère toutes les coniques bitangentes à un cercle fixe, passant par un point fixe et d'excentricité donnée. Montrer :*

1° Que le lieu de leurs centres est un limaçon de Pascal;

2° Que leurs axes (ne passant pas par le centre du cercle) enveloppent un cercle;

3° Que le lieu de leurs foyers se compose d'une ovale de Descartes et d'un cercle concentrique au cercle donné.

On sait que si une conique est bitangente à un cercle, la corde des contacts est perpendiculaire à l'un des axes de cette conique, et la puissance d'un point quelconque de la conique par rapport au cercle divisée par le carré de la distance de ce même point à la corde des contacts est un nombre constant pour tous les points de la conique.

Nous allons établir que ce nombre ne dépend que de l'excentricité de la conique.

Deux cas sont à distinguer : supposons d'abord que la corde des contacts soit perpendiculaire à l'axe focal et par suite que le centre du cercle soit sur ce même axe; soit

$$x^2 + y^2 - e^2(x - p)^2 = 0$$

l'équation de la conique; celle d'un cercle bitangent ayant son centre sur l'axe Ox qui est l'axe focal pourra s'écrire

$$x^2 + y^2 - e^2(x - p)^2 + \lambda(x - h)^2 = 0.$$

Écrivons que cette équation représente un cercle; on a $\lambda = e^2$, et l'équation du cercle devient

$$C \equiv x^2 + y^2 + 2e^2x(p - h) - e^2(p^2 - h^2) = 0.$$

On peut alors écrire l'identité

$$x^2 + y^2 - e^2(x - p)^2 = C - e^2(x - h)^2;$$

et nous voyons que le nombre constant dont il a été question plus haut est égal à e^2.

Tous les points de la conique sont dans ce cas extérieurs au cercle.

Supposons en second lieu que la corde des contacts soit parallèle à l'axe focal; l'équation du cercle sera de la forme

$$x^2 + y^2 - e^2(x - p)^2 + \lambda(y - k)^2 = 0.$$

avec la condition $\lambda = -e^2$.

On peut alors écrire cette équation

$$C \equiv x^2 + y^2 + 2e^2x\left(\frac{p+k}{1-e^2}\right) - \frac{e^2(p^2+k^2)}{1-e^2} = 0;$$

de sorte que l'on a l'identité

$$x^2 + y^2 - e^2(x-p)^2 \equiv (1-e^2)\left[C - \frac{e^2}{e^2-1}(y-k)^2\right],$$

et le nombre constant dont nous avons parlé est ici $\frac{e^2}{e^2-1}$. On sait d'ailleurs que si l'on nomme e l'excentricité relative aux foyers imaginaires, $e'^2 = \frac{e^2}{e^2-1}$.

Si $e^2 > 1$, c'est-à-dire si la conique est une hyperbole, tous les points de la conique sont extérieurs au cercle; si au contraire la conique est une ellipse, tous les points de cette conique sont à l'intérieur du cercle.

Revenons maintenant au problème proposé, prenons pour axes de coordonnées deux diamètres rectangulaires du cercle dont l'un, Ox par exemple, passe par le point donné A, d'abscisse a.

L'équation générale des coniques bitangentes à ce cercle sera

$$x^2 + y^2 - R^2 - \lambda(x\cos\theta + y\sin\theta - p)^2 = 0$$

avec la condition

$$a^2 - R^2 - \lambda(a\cos\theta - p)^2 = 0. \qquad (1)$$

En outre, comme l'excentricité de ces coniques est donnée, λ aura une valeur constante qui sera soit e^2 si l'axe focal de la conique passe par le centre du cercle, soit $\frac{e^2}{e^2-1}$ si c'est l'axe non focal qui passe par le centre du cercle.

1° Les coordonnées du centre sont données par

$$x - \lambda(x\cos\theta + y\sin\theta - p)\cos\theta = 0, \qquad (2)$$

$$y - \lambda(x\cos\theta + y\sin\theta - p)\sin\theta = 0. \qquad (3)$$

On aura l'équation du lieu en éliminant p et θ entre les équations (1), (2) et (3).

Des équations (2) et (3) on déduit

$$\frac{x}{\cos\theta} = \frac{y}{\sin\theta} = \pm\sqrt{x^2+y^2}.$$

Il est donc naturel de passer en coordonnées polaires, puisque θ peut être considéré comme l'angle polaire d'un point du lieu. Remplaçons dans (2) x par $\rho\cos\theta$, y par $\rho\sin\theta$; il vient

$$p = \frac{\rho(\lambda-1)}{\lambda}.$$

Portant cette valeur de p dans l'équation (1), qui peut s'écrire

$$p = a\cos\theta \pm \sqrt{\frac{a^2-R^2}{\lambda}}, \qquad (4)$$

on obtient pour l'équation du lieu

$$\rho = \frac{a\lambda}{\lambda-1}\cos\theta \pm \frac{\lambda}{\lambda-1}\sqrt{\frac{a^2-R^2}{\lambda}},$$

qui représente un limaçon de Pascal.

La relation (4) montre que λ et $a^2 - R^2$ doivent être de même signe.

Si $a^2 - R^2 < 0$, le point A est à l'intérieur du cercle, λ doit être négatif; l'excentricité donnée

doit être alors inférieure à 1, et λ doit être remplacé par $\frac{e^2}{e^2 - 1}$. Dans ce cas, l'axe non focal de la conique passe par le centre du cercle.

Si $a^2 - R^2 > 0$, le point A est à l'extérieur du cercle, λ doit être positif; l'excentricité donnée peut être inférieure ou supérieure à 1. Dans le premier cas λ doit être remplacé par e^2; dans le second, λ peut recevoir les deux valeurs e^2 et $\frac{e^2}{e^2 - 1}$, de sorte que le lieu se compose de deux limaçons de Pascal.

2° L'axe de la conique qui ne passe pas par le centre du cercle est parallèle à la corde des contacts et passe par le centre de la conique, c'est-à-dire par l'intersection des droites représentées par les équations (2) et (3). On obtient immédiatement l'équation de cet axe en multipliant les premiers membres des équations (2) et (3) respectivement par $\cos\theta$ et $\sin\theta$, puis ajoutant. Il vient

$$x\cos\theta + y\sin\theta - \lambda(x\cos\theta + y\sin\theta - p) = 0$$

ou

$$(x\cos\theta + y\sin\theta)(1 - \lambda) + p\lambda = 0.$$

Remplaçons p par sa valeur (4); on a

$$[x(1 - \lambda) + a\lambda]\cos\theta + y(1 - \lambda)\sin\theta \pm \lambda\sqrt{\frac{a^2 - R^2}{\lambda}} = 0.$$

Quand θ varie, l'enveloppe de cette droite a pour équation

$$[x(1 - \lambda) + a\lambda]^2 + y^2(1 - \lambda)^2 = \lambda(a^2 - R^2),$$

qui représente un cercle.

On peut répéter ici les mêmes observations que plus haut à l'égard de la valeur que doit prendre λ.

Dans le cas où $a^2 - R^2 > 0$, $e > 1$, l'enveloppe se compose de deux cercles.

3° Supposons en premier lieu que l'axe focal des coniques passe par le centre du cercle; alors $\lambda = e^2$, et on doit avoir $a^2 - R^2 > 0$.

L'équation générale des coniques s'écrit

$$x^2 + y^2 - R^2 - e^2(x\cos\theta + y\sin\theta - p)^2 = 0.$$

Soit (α, β) un foyer; la directrice est parallèle à la corde des contacts, en sorte que l'équation peut aussi s'écrire

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - e^2(x\cos\theta + y\sin\theta - q)^2 = 0.$$

Écrivons que ces deux équations représentent la même courbe; comme les termes du deuxième degré sont les mêmes, on a les conditions

$$\alpha = e^2\cos\theta(q - p),$$
$$\beta = e^2\sin\theta\,(q - p),$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + R^2 = e^2(q^2 - p^2).$$

On a aussi d'après l'équation (4)

$$p = a\cos\theta \pm \sqrt{\frac{a^2 - R^2}{e^2}}.$$

En éliminant p, q et θ entre ces quatre équations, on aura l'équation du lieu.

Les deux premières montrent que α et β sont proportionnels à $\cos\theta$ et $\sin\theta$; en passant en coordonnées polaires, θ sera l'angle polaire; en remplaçant α et β par $\rho\cos\theta$ et $\rho\sin\theta$, on obtient

$$\rho = e^2(q - p),$$
$$\rho^2 + R^2 = e^2(q^2 - p^2).$$

Divisons membre à membre; on a

$$q + p = \frac{\rho^2 + R^2}{\rho},$$

et comme

$$q - p = \frac{\rho}{e^2}.$$

on a

$$2p = \frac{\rho^2 + R^2}{\rho} - \frac{\rho}{e^2} = \frac{\rho^2(e^2 - 1) + e^2R^2}{e^2\rho},$$

et par suite l'équation du lieu s'écrit

$$\frac{\rho^2(e^2 - 1) + e^2R^2}{2e^2\rho} = a\cos\theta \pm \sqrt{\frac{a^2 - R^2}{e^2}},$$

ou encore

$$\rho^2(e^2 - 1) - 2e\rho(ae\cos\theta \pm \sqrt{a^2 - R^2}) + e^2R^2 = 0.$$

On reconnaît l'équation d'une ovale de Descartes dont le point O est l'un des foyers.

On peut montrer aisément que le point A est un second foyer. En effet l'équation peut s'écrire

$$e^2(\rho^2 - 2a\rho\cos\theta + a^2) - (\rho \pm e\sqrt{a^2 - R^2})^2 = 0$$

ou

$$e\sqrt{\rho^2 - 2a\rho\cos\theta + a^2} = \pm\rho \pm e\sqrt{a^2 - R^2}.$$

Soit M un point du lieu; on a

$$\rho^2 - 2a\rho\cos\theta + a^2 = \overline{MA}^2;$$

on a donc

$$e\mathrm{MA} \pm \mathrm{MO} = \pm e\sqrt{a^2 - R^2}.$$

Le point M appartient donc à une ovale de Descartes qui a pour foyers les points O et A.

Dans le cas où $e = 1$, le lieu se réduit à une conique qui a les mêmes foyers.

Examinons en second lieu le cas où c'est l'axe non focal des coniques qui passe par le centre du cercle; alors $\lambda = \frac{e^2}{e^2 - 1}$, la directrice est perpendiculaire à la corde des contacts, et en désignant par α et β les coordonnées d'un foyer, l'équation d'une conique peut prendre les deux formes suivantes :

$$(x^2 + y^2 - R^2)(e^2 - 1) - e^2(x\cos\theta + y\sin\theta - p)^2 = 0,$$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - e^2(x\sin\theta - y\cos\theta - q)^2 = 0.$$

Écrivons que ces deux équations représentent la même courbe; comme les coefficients des termes du deuxième degré sont égaux et de signe contraire, il suffit d'écrire qu'il en est de même pour les coefficients de x, de y et pour les termes indépendants. On a ainsi

$$e^2(p\cos\theta + q\sin\theta) = \alpha,$$

$$e^2(p\sin\theta - q\cos\theta) = \beta,$$

$$e^2(p^2 + q^2) = \alpha^2 + \beta^2 - R^2(e^2 - 1).$$

Des deux premières relations on tire, en faisant la somme des carrés, $e^4(p^2 + q^2) = \alpha^2 + \beta^2$; $p^2 + q^2$ s'élimine aisément et il reste $\alpha^2 + \beta^2 = R^2e^2$.

On voit ainsi que le lieu est un cercle concentrique au cercle donné.

Paul Begou, lycée de Marseille.

On a reçu la bonne solution : MM. Aubry, à Marseille; capitaine E.-N. Barisien; Felix Dutech, lycée de Toulouse; J. Hais, à Étampes; Eugène Lemaire, lycée de Toulouse; A. Marmier, lycée de Moulins.

216. — *La tangente en un point* M *d'une ellipse rencontre les tangentes aux sommets du grand axe en deux points* C, D *que l'on joint aux foyers. Le point* M *se déplaçant sur l'ellipse, on demande le lieu des points* G, H *en lesquels les quatre droites obtenues se coupent;*

2° Trouver l'enveloppe des polaires de G *et* H *par rapport à l'ellipse;*

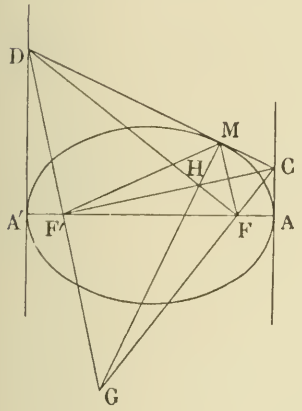
3° Chercher l'enveloppe de GH *au moyen des coordonnées des points* G *et* H.

Rapportons l'ellipse à ses axes; soient $a \cos \varphi$, $b \sin \varphi$ les coordonnées du point M et

$$\frac{x \cos \varphi}{a} + \frac{y \sin \varphi}{b} - 1 = 0$$

l'équation de la tangente en ce point.

Une droite quelconque passant par le point C a pour équation



$$\frac{x \cos \varphi}{a} + \frac{y \sin \varphi}{b} - 1 + \lambda(x - a) = 0;$$

écrivons que cette droite passe par le point F; on a

$$\frac{c \cos \varphi}{a} - 1 + \lambda(c - a) = 0 ;$$

équation qui détermine λ et en transportant cette valeur dans l'équation précédente on a, en simplifiant,

$$b(x - c)(1 - \cos \varphi) - (a - c)\, y \sin \varphi = 0, \qquad (1)$$

qui est l'équation de la droite CF'.

On a de même pour l'équation de la droite DF'

$$b(x + c)(1 + \cos \varphi) + (a - c)\, y \sin \varphi = 0. \qquad (2)$$

En résolvant les équations (1) et (2) nous aurons les coordonnées du point G; on obtient ainsi

$$x_1 = - c \cos \varphi , \qquad y_1 = - \frac{bc}{a - c} \sin \varphi .$$

En changeant c en $- c$ nous aurons les coordonnées du point H :

$$x_2 = c \cos \varphi , \qquad y_2 = \frac{bc}{a + c} \sin \varphi .$$

1° On voit alors immédiatement que les points G et H décrivent respectivement les ellipses qui ont pour équations

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{(a - c)^2 y^2}{b^2 c^2} = 1 , \qquad \frac{x^2}{c^2} + \frac{(a + c)^2 y^2}{b^2 c^2} = 1 .$$

2° La polaire du point G par rapport à l'ellipse donnée a pour équation

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} - 1 = 0,$$

ou

$$- \frac{cx \cos \varphi}{a^2} - \frac{cy \sin \varphi}{b(a - c)} - 1 = 0,$$

et cette droite enveloppe la courbe qui a pour équation

$$\frac{c^2 x^2}{a^4} + \frac{c^2 y^2}{b^2 (a - c)^2} - 1 = 0.$$

En changeant c en $- c$, on a l'enveloppe de la polaire du point H.

3° Connaissant les coordonnées des points G et H il est aisé de former l'équation de la droite GH ; on trouve

$$ax \sin \varphi - by \cos \varphi - c^2 \sin \varphi \cos \varphi = 0,$$

équation qui représente la normale à l'ellipse donnée au point M. Il en résulte que la droite GH enveloppe la développée de l'ellipse.

Remarque. — Ces résultats peuvent s'obtenir par de simples considérations géométriques.

Les points C et D décrivent sur les tangentes aux sommets des divisions homographiques; les lieux des points G et H sont des coniques passant par les points F et F′, symétriques par rapport aux deux axes et n'ayant aucun point à l'infini; ce sont donc des ellipses qui ont FF′ comme axe.

L'enveloppe des polaires de ces points sont les coniques polaires réciproques de ces deux ellipses par rapport à l'ellipse donnée.

Enfin FC et FD sont respectivement bissectrices des angles MFA et MFA′, de même F′C et F′D sont bissectrices des angles MF′A et MF′A′. Il en résulte que les points G et H sont situés sur la bissectrice de l'angle FMF′, c'est-à-dire sur la normale en M.

(Félix Dutech, lycée de Toulouse.)

Ont résolu la même question : MM. A. Bailly, lycée de Dijon ; E. N. Barisien ; L. Bassal, lycée de Toulouse; Paul Begou, lycée de Marseille; G. Bloch, lycée de Dijon ; Ch. Braillion, lycée d'Amiens; Eugène Lequintrec, lycée de Toulouse ; A. Marmion, lycée de Moulins; M. Meynieb.

---

218. — *On donne un triangle* ABC; *on joint le sommet* A *à un point* N *pris sur le côté opposé. Soit* M *le milieu de* AN. *On mène les droites* BM *et* CM, *qui rencontrent respectivement* AC *et* AB *en* P *et* Q. *On demande l'enveloppe de la droite* PQ *lorsque le point* N *décrit la droite* BC.

Prenons pour axes de coordonnées les deux côtés AB et AC du triangle et posons AB $= a$ AC $= b$; soit

$$ux + vy - 1 = 0$$

l'équation de la droite PQ.

Les droites PC et QB ont évidemment pour équations

$$ux + \frac{y}{b} - 1 = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{x}{a} + vy - 1 = 0. \qquad (2)$$

Supposons que $AM = \frac{AN}{k}$ k étant une constante; la parallèle à BC menée par le point M, a pour équation

$$k\frac{x}{a} + k\frac{y}{b} - 1 = 0. \qquad (3)$$

Il ne reste plus qu'à exprimer que les droites représentées par les équations (1), (2), (3) sont concourantes, ce qui donne la condition

$$abuv - k(au + bv) + 2k - 1 = 0. \qquad (4)$$

Cette équation est l'équation tangentielle d'une conique tangente aux axes de coordonnées; elle est vérifiée pour $u = \frac{1}{a}$, $v = \frac{1}{b}$; donc cette conique est aussi tangente à la droite BC.

Pour obtenir commodément l'équation ponctuelle de l'enveloppe, remarquons que l'équation (4) peut s'écrire ainsi :

$$(au - k)(bv - k) - (k - 1)^2 = 0, \qquad (5)$$

ce qui conduit à écrire l'équation de PQ sous la forme

$$(au - k)\frac{x}{a} + (bv - k)\frac{y}{b} + k\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right) = 0,$$

ou encore $$(au - k)^2\frac{x}{a} + k\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)(au - k) + (k - 1)^2\frac{y}{b} = 0,$$

l'enveloppe a donc pour équation

$$k^2\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)^2 - 4\,(k - 1)^2\frac{xy}{ab} = 0.$$

La solution géométrique est très simple; en effet les sommets du triangle PMQ glissent sur trois droites fixes et les deux côtés PM, MQ passent chacun par un point fixe, donc le côté PQ enveloppe une conique. On voit d'ailleurs que P et Q tracent deux divisions homographiques sur les côtés AB, AC du triangle donné; ces côtés sont tangents à la conique enveloppe; quand le point N s'éloigne à l'infini PQ coïncide avec BC, donc la conique est aussi tangente au côté BC.

Ont résolu la question : MM. Bailly (lycée de Dijon) ; H. Brélivet (lycée de Nantes), P. Bégou (Marseille) ; F. Dutech (Toulouse) ; H. Gaubot (lycée Condorcet) ; E. Gueden (lycée Saint-Louis) ; Lequintrec (lycée de Toulouse) ; Marmion (lycée de Moulins) ; M. Meynier (Nancy).

---

229. — *En désignant par* a, b, x′, y′ *des constantes, on demande de déterminer* λ *de façon que*

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) - (x - x')^2 - (y - y')^2$$

soit le produit de deux facteurs P, Q *du premier degré en* x *et* y. *L'équation en* λ *admet une racine nulle et deux autres racines réelles. Pour l'une de ces racines les facteurs* P, Q, *sont réels, pour l'autre ils sont imaginaires.*

Étant donnée une ellipse $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

en coordonnées rectangulaires, on considère un point fixe M (x′, y′) *et on demande de déterminer deux droites* P, Q *telles que le carré de la distance d'un point quelconque de l'ellipse à* M *divisé par le produit de ses distances à* P *et à* Q *soit constant, c'est-à-dire indépendant de la position du point de l'ellipse considéré. On formera explicitement les équations de ces droites en supposant* M *sur l'ellipse. Lieu de leur intersection quand* M *parcourt l'ellipse.*

Inversement, étant donnée la droite (P) ux + vy − 1 = 0, *peut-on trouver un point* M *et une droite* Q *tels que le carré de la distance d'un point quelconque de l'ellipse à* M *divisé par le produit de ses distances à* P, Q *soit constant? Montrer qu'on trouve en général deux positions pour* M, *symétriques par rapport à* P. *Comment la droite* P *doit-elle être placée pour que ces deux solutions soient réelles?*

(Bourses de licence, 1892.)

1° Le polynome $$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) - (x - x')^2 - (y - y')^2 \qquad (1)$$

sera le produit de deux facteurs P, Q linéaires en x et y, si λ est racine de l'équation

$$\begin{vmatrix} \frac{\lambda}{a^2} - 1 & 0 & x' \\ 0 & \frac{\lambda}{b^2} - 1 & y' \\ x' & y' & -(x'^2 + y'^2 + \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

ou, en développant

$$\left(\frac{\lambda}{a^2}-1\right)\left(\frac{\lambda}{b^2}-1\right)\left(x'^2+y'^2+\lambda\right)+x'^2\left(\frac{\lambda}{b^2}-1\right)+y'^2\left(\frac{\lambda}{a^2}-1\right)=0. \qquad (2)$$

Cette équation a une racine nulle, ce qui était évident *a priori*, puisque le polynome (1) se réduit, pour $\lambda = 0$, à

$$-[(x-x')^2+(y-y')^2]$$

ou

$$-[x-x'+i(y-y')][x-x'-i(y-y')].$$

Si l'on substitue à λ dans le premier membre de l'équation (1)

$$-\infty, \qquad b^2, \qquad a^2, \qquad +\infty,$$

on trouve des résultats ayant respectivement les signes

$$- \qquad - \qquad + \qquad +,$$

ce qui montre que l'équation (2) a une racine réelle λ' comprise entre a^2 et b^2 et comme elle a déjà une racine nulle, elle a deux racines réelles comprises entre $-\infty$ et b^2, de sorte que ses trois racines sont réelles. Ce résultat est évident *a priori*, car les quatre points d'intersection des deux coniques représentées par les équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

et

$$(x-x')^2+(y-y')^2=0$$

étant évidemment imaginaires, les racines de l'équation en λ relatives à ces deux coniques sont réelles. Le genre de la conique représenté par l'équation

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)-(x-x')^2-(y-y')^2=0$$

dépend du signe de

$$\delta=\left(\frac{\lambda}{a^2}-1\right)\left(\frac{\lambda}{b^2}-1\right).$$

Si l'on remplace λ par un nombre compris entre a^2 et b^2, δ est négatif; donc les facteurs linéaires P, Q qui correspondent à $\lambda = \lambda'$ sont réels; ceux qui correspondent aux deux autres racines sont imaginaires conjugués.

2° Soient

$$ux+vy-1=0; \qquad u'x+v'y-1=0$$

les équations de deux droites P, Q. Le produit des distances d'un point $M(x, y)$ aux droites P, Q, étant égal à

$$\frac{(ux+vy-1)(u'x+v'y-1)}{\sqrt{u^2+v^2}\cdot\sqrt{u'^2+v'^2}},$$

on doit pouvoir mettre l'équation de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \qquad (3)$$

sous la forme

$$(x-x')^2+(y-y')^2=k\,\frac{(ux+vy-1)(u'x+v'y-1)}{\sqrt{u^2+v^2}\cdot\sqrt{u'^2+v'^2}}; \qquad (4)$$

donc il doit y avoir un facteur λ tel que l'on ait identiquement

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\equiv(x-x')^2+(y-y')^2-k\,\frac{(ux+vy-1)(u'x+v'y-1)}{\sqrt{u^2+v^2}\cdot\sqrt{u'^2+v'^2}}$$

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)-(x-x')^2-(y-y')^2\equiv-k\,\frac{(ux+vy-1)(u'x+v'y-1)}{\sqrt{u^2+v^2}\cdot\sqrt{u'^2+v'^2}},$$

d'où il résulte que pour avoir des droites réelles répondant à la question, on doit prendre $\lambda = \lambda'$, et par suite il y a toujours un système de deux droites réelles P, Q et un seul.

Il s'agit de former les équations des droites P, Q quand on suppose que le point M est sur l'ellipse donnée, c'est-à-dire que

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 = 0.$$

L'équation (2) développée peut s'écrire

$$\frac{\lambda^3}{a^2b^2} + \frac{\lambda^2}{a^2b^2}(x'^2 + y'^2 - a^2 - b^2) - \lambda\left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1\right) = 0,$$

et par suite lorsque le point M est sur l'ellipse, l'équation précédente a une racine double égale à zéro et à laquelle correspondent deux droites isotropes, et une racine simple

$$\lambda = -(x'^2 + y'^2 - a^2 - b^2).$$

L'équation
$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = 0$$

représente un cercle de rayon nul ayant son centre M sur l'ellipse; l'équation en λ ayant une racine double, le cercle est tangent à l'ellipse en M, et par suite les sécantes communes qui correspondent à la racine simple se composent de la tangente en M à l'ellipse et d'une seconde droite également inclinée sur les axes; donc on doit pouvoir déterminer deux constantes h, h' telles que

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)(x'^2 + y'^2 - a^2 - b^2) + (x - x')^2 + (y - y')^2 \equiv h\left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1\right)\left(\frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} + h'\right).$$

Les équations déterminant h et h' sont les suivantes;

$$a^2(x'^2 + y'^2 - b^2) = hx'^2,$$
$$b^2(x'^2 + y'^2 - a^2) = hy'^2,$$
$$2a^2 = -h(h' - 1).$$
$$2b^2 = -h(h' + 1),$$
$$a^2 + b^2 = -hh'.$$

L'équation $\frac{h' - 1}{h' + 1} = \frac{a^2}{b^2}$ donne $h' = -\frac{a^2 + b^2}{c^2}$ et par suite $h = +c^2$, et l'on reconnaît que les deux premières équations sont vérifiées quand $h = c^2$; les droites demandées sont donc définies par les équations

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} - \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 0.$$

Les coordonnées de leur point de rencontre sont données par les formules

$$\frac{xx'}{a^2} = \frac{a^2}{a^2 - b^2},$$

$$\frac{yy'}{b^2} = \frac{-b^2}{a^2 - b^2};$$

l'équation du lieu de ce point s'obtient en éliminant x' et y' entre ces équations et l'équation

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

ce qui donne $$a^6y^2 + b^6x^2 = c^4x^2y^2.$$

Cette équation représente le lieu des pôles des normales à l'ellipse par rapport à l'ellipse elle-même.

3° Supposons donnée une droite P, ayant pour équation

$$ux + vy - 1 = 0;$$

il s'agit de trouver la sécante associée à P, soit Q, telle que P et Q soient deux sécantes communes à l'ellipse et aux droites isotropes menées par M; on doit donc encore trouver trois constantes λ, h, h' telles que l'on ait identiquement

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) - (x - x')^2 - (y - y')^2 \equiv h(ux + vy - 1)(ux - vy + h').$$

Les équations qui déterminent λ, h, h', x', y' sont donc :

$$\frac{\lambda}{a^2} - 1 = hu^2, \tag{5}$$

$$\frac{\lambda}{b^2} - 1 = -hv^2, \tag{6}$$

$$2x' = hu(h' - 1), \tag{7}$$

$$2y' = hv(h' + 1), \tag{8}$$

$$x'^2 + y'^2 + \lambda = hh'. \tag{9}$$

Les deux premières équations donnent

$$\frac{\lambda - a^2}{-a^2u^2} = \frac{\lambda - b^2}{b^2v^2} = \frac{c^2}{a^2u^2 + b^2v^2}.$$

d'où l'on tire $$\lambda = a^2b^2\frac{u^2 + v^2}{a^2u^2 + b^2v^2},$$

et par suite $$h = \frac{-c^2}{a^2u^2 + b^2v^2}.$$

On a ensuite $$\frac{h' - 1}{h' + 1} = \frac{vx'}{uy'},$$

d'où $$h' = \frac{vx' + uy'}{uy' - vx'}.$$

Cette équation montre qu'à chaque point (x', y') correspond toujours une valeur de h' et une seule. D'autre part les équations (8) et (9) donnent

$$\frac{vx' + uy'}{uv} = hh';$$

donc $$x'^2 + y'^2 + a^2b^2\frac{u^2 + v^2}{a^2u^2 + b^2v^2} - \frac{vx' + uy'}{uv} = 0. \tag{10}$$

On déduit encore des mêmes équations

$$vx' - uy' = -huv$$

ou $$vx' - uy' = \frac{c^2uv}{a^2u^2 + b^2v^2}. \tag{11}$$

Le point M cherché est donc l'un des points d'intersection du cercle et de la droite représentée

par les équations (10) et (11). Le centre du cercle (10) a pour coordonnées $x_0 = \frac{1}{2u}$, $y_0 = \frac{1}{2v}$; il est donc sur la droite P. En second lieu l'équation (11) représente une perpendiculaire à la droite P; il y a donc deux points M répondant à la question et ces points sont symétriques par rapport à la droite P. Le carré du rayon du cercle est

$$R^2 = \frac{1}{4u^2} + \frac{1}{4v^2} - a^2b^2 \frac{u^2 + v^2}{a^2u^2 + b^2v^2}.$$

En exprimant que la distance du centre à la droite (11) est moindre que R, on a, pour la condition de réalité

$$\left(\frac{v^2 - u^2}{2uv} - \frac{c^2uv}{a^2u^2 + b^2v^2}\right)^2 < (u^2 + v^2)\left[\frac{1}{4u^2} + \frac{1}{4v^2} - a^2b^2 \frac{u^2 + v^2}{a^2u^2 + b^2v^2}\right],$$

ou, en développant et simplifiant,

$$\frac{c^4u^2v^2}{(a^2u^2 + b^2v^2)^2} + \frac{c^2(u^2 - v^2)}{a^2u^2 + b^2v^2} < 1 - \frac{a^2b^2(u^2 + v^2)^2}{a^2u^2 + b^2v^2},$$

c'est-à-dire

$$c^4u^2v^2 + c^2(u^2 - v^2)(a^2u^2 + b^2v^2) - (a^2u^2 + b^2v^2)^2 + a^2b^2(u^2 + v^2)^2(a^2u^2 + b^2v^2) < 0$$

ou

$$- a^2b^2(u^4 + v^4 + 2u^2v^2) + a^2b^2(u^2 + v^2)^2(a^2u^2 + b^2v^2) < 0,$$

et enfin,

$$a^2u^2 + b^2v^2 - 1 < 0,$$

ce qui exprime que la droite P doit être extérieure à l'ellipse.

Remarques. — La deuxième partie revient à déterminer les sécantes réelles communes aux deux droites isotropes issues de M et à l'ellipse. On peut construire géométriquement ces deux droites. En effet, proposons nous : 1° de trouver le point de concours de ces sécantes; 2° ce point de concours étant déterminé, de trouver les sécantes elles-mêmes.

I. On sait que les centres des systèmes de sécantes communes à l'ellipse et aux droites isotropes sont tous les trois réels. Soient M, N, P les trois centres; NP est la polaire de M, et comme MN et MP sont conjuguées par rapport aux deux droites isotropes issues de M, ces droites sont rectangulaires, et puisqu'elles sont aussi conjuguées par rapport à l'ellipse, ce sont les bissectrices des angles formés par les tangentes à l'ellipse issues de M. Les deux points N et P sont donc déterminés. Si M est extérieur à l'ellipse, l'un des points N ou P, P par exemple, est intérieur, l'autre N est extérieur à l'ellipse; le point N est le centre des sécantes réelles.

II. Soient MT, MT′ les tangentes à l'ellipse menées par M, T et T′ étant les points de contact. Les deux sécantes issues de N sont conjuguées par rapport à NTT′ et à NM; de plus elles sont également inclinées sur les axes; donc si l'on mène les droites NX′, NY′ parallèles aux axes, on devra déterminer deux droites issues de N et conjuguées à la fois par rapport à NX′, NY′ et par rapport à NM, NT. Les droites cherchées sont donc les rayons doubles de l'involution déterminée par ces deux couples de droites.

III. Si le point M vient sur l'ellipse, MN devient la tangente en M et MP la normale au même point et le point N est le pôle de cette normale. L'une des sécantes est la tangente NM; l'autre passe par N et a une direction déterminée, puisque les deux sécantes sont également inclinées sur les axes. Et l'on voit que le lieu du point de rencontre des sécantes est le lieu du pôle d'une normale.

3e partie. — La dernière partie du problème revient à trouver les cercles de rayon nul passant par l'intersection de l'ellipse et de la droite P. Les centres de ces cercles sont les points limites de Poncelet relatifs aux points d'intersection de l'ellipse et de P; pour qu'ils soient réels il faut et il suffit que P soit extérieur à l'ellipse. Supposons cette condition remplie. Le milieu de la corde imaginaire joignant les points d'intersection de P et de l'ellipse est à l'intersection de I et du diamètre conjugué à sa direction; soit R ce point. Les cercles passant par les points limites sont orthogonaux aux cercles passant par les points d'intersection de P et de l'ellipse. Traçons une droite Q faisant avec les axes de l'ellipse les mêmes angles que P (mais non parallèle à P), et coupant l'ellipse, puis faisons passer par les points d'intersection de Q et de l'ellipse un cercle (C) ayant son centre sur la perpendiculaire RR′ à P menée par R. Cela fait, si l'on trace un cercle orthogonal à C et ayant son centre sur P″, les points d'intersection de ce dernier cercle avec RR′ sont les points cherchés; ils sont symétriques par rapport à P.

J. Vandier, soldat au 114e de ligne, à Saint-Maixent.

Ont envoyé des solutions exactes : MM. P. Begou (Marseille); Lequintrec (Toulouse).

---

232. — *D'un point du plan d'une ellipse on abaisse les quatre normales. Soient* N_1, N_2, N_3, N_4 *les distances du point d'émission des normales à leurs pieds;* P_1, P_2, P_3, P_4 *les portions de ces normales interceptées entre les deux axes de l'ellipse. Démontrer la relation*

$$\frac{N_1}{P_1} + \frac{N_2}{P_2} + \frac{N_3}{P_3} + \frac{N_4}{P_4} = \textit{constante}.$$

Soient (x, y) les coordonnées du pied d'une des normales issues du point $P(\alpha, \beta)$; si dans l'équation de la normale au point (x, y), savoir :

$$\frac{a^2(X - x)}{x} = \frac{b^2(Y - y)}{y} = \rho,$$

on fait successivement $X = \alpha$, $Y = \beta$; puis $Y = 0$, et enfin $X = 0$, on obtient trois valeurs correspondantes de ρ, qui sont $\rho_1 = \lambda_1$, $\rho_2 = -b^2$, $\rho_3 = -a^2$.

Or
$$\frac{N_1}{P_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_3} = \frac{\lambda_1}{c^2},$$

et l'on sait que les valeurs de λ qui correspondent aux quatre normales issues de P sont les racines de l'équation

$$\frac{a^2\alpha^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{b^2\beta^2}{(b^2 + \lambda)^2} - 1 = 0.$$

Si λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 sont les quatre racines de cette équation, on a

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = -2(a^2 + b^2);$$

donc
$$\frac{N_1}{P_1} + \frac{N_2}{P_2} + \frac{N_3}{P_3} + \frac{N_4}{P_4} = -2\,\frac{a^2 + b^2}{c^2}.$$

Ont résolu la même question : MM. A. Bailly (lycée de Dijon); G. Bloch (lycée de Dijon); Duhameaux (lycée d'Amiens; Lebesgue (lycée Saint-Louis; E. Lequintrec (lycée de Toulouse); A. Marmion (lycée de Moulins).

---

235. — *Un diamètre d'une ellipse est donné en grandeur et en position; son conjugué est donné en grandeur seulement. Trouver le lieu des foyers de l'ellipse.*

L'équation tangentielle de l'ellipse rapportée à ses deux diamètres conjugués donnés, dont les longueurs sont $2a$ et $2b$, étant

$$a^2u^2 + b^2v^2 - 1 = 0,$$

si l'on fait une transformation de coordonnées en conservant l'axe des x et prenant pour axe des y la perpendiculaire à OA menée par le point O, les formules de transformation sont

$$u = \mathrm{U}, \quad v = \mathrm{U}\cos\theta + \mathrm{V}\sin\theta,$$

et l'équation tangentielle rapportée aux nouveaux axes est

$$a^2\mathrm{U}^2 + b^2(\mathrm{U}\cos\theta + \mathrm{V}\sin\theta)^2 = 1.$$

Soient (x, y) les coordonnées d'un foyer; l'équation

$$\mathrm{Y} - y = i(\mathrm{X} - x)$$

est celle d'une tangente à l'ellipse; donc

$$-a^2 + b^2(i\cos\theta - \sin\theta)^2 = (y - ix)^2;$$

d'où, en égalant entre elles les parties réelles et les parties imaginaires des deux membres respectivement :

$$b^2\cos^2\theta = x^2 - y^2 - a^2,$$

$$b^2\sin^2\theta = 2xy.$$

L'équation du lieu est donc

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4 - b^4 = 0$$

et représente une ovale de Cassini dont les foyers sont les extrémités du diamètre donné en grandeur et position. Si l'on suppose $b < a$, on a deux ovales séparées; si $b = a$, une lemniscate, et si $b > a$, une ovale unique.

(A. Marmion, lycée de Moulins.)

Solutions analytiques exactes : MM. Audoin (lycée Louis-le-Grand); Bailly (lycée de Dijon); E.-N. Barisien; P. Bégot (lycée de Marseille); L. Espinat (à Espinchal, Puy-de-Dôme); E. Lequintrec (lycée de Toulouse); M. Meynier (École Saint-Sigisbert, à Nancy); *** (à Nancy).

Solution géométrique. — On sait que le produit des distances des foyers d'une ellipse de centre O à un point M de la courbe est égal au carré du demi-diamètre conjugué de OM; ce qui peut s'énoncer ainsi : le produit des distances d'un foyer aux extrémités d'un diamètre est égal au carré du demi-diamètre conjugué. Le lieu est donc bien une ovale de Cassini.

Solutions géométriques exactes : MM. Bailly; E.-N. Barisien; L. Espinat; Marmion.

QUESTIONS PROPOSÉES

L'énoncé n° **250** doit être rectifié ainsi :

250. — Trouver le lieu des foyers des coniques inscrites dans un triangle et dont un des foyers décrit une droite. Examiner le cas où cette droite est rejetée à l'infini et, dans ce cas, chercher l'enveloppe des axes des coniques inscrites et démontrer qu'il existe un point et un seul d'où l'on voit ces coniques sous un angle droit.

(Ch. Hugon.)

265. — x_1, x_2, x_3 étant les racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$, montrer qu'on peut calculer trois nombres a, b, c, tels que

$$x_2 = a + \frac{b}{c + x_1}, \qquad x_3 = a + \frac{b}{c + x_2}, \qquad x_1 = a + \frac{b}{c + x_3}.$$

Déduire la réalité de x_1, x_2, x_3 de celle des nombres a, b, c.

Transformer l'équation proposée en une autre $f(y) = 0$, où les racines y_1, y_2, y_3 donnent

$$y_2 = 1 - \frac{1}{y_1}, \qquad y_3 = 1 - \frac{1}{y_2}, \qquad y_1 = 1 - \frac{1}{y_3}.$$

P. Barbarin, professeur au lycée de Bordeaux.

266. — S_i désignant la somme des puissances i des racines de l'équation $x^m + px^n + q = 0$, où m et n sont entiers, ainsi que i, prouver qu'on a en général

$$\frac{S_{(k+1)m-n}}{(k+1)m - n} = \frac{S_{km-n}}{km - n} \times \frac{S_m}{m}$$

$$\frac{S_{(k+1)(m-n)+n}}{(k+1)(m-n) + n} = \frac{S_{k(m-n)+n}}{k(m-n) + n} \times \frac{S_{m-n}}{m - n}.$$

Voir si ces relations sont vraies pour toutes valeurs entières de m et n, et les conditions que doit remplir k.

P. Barbarin.

267. — On donne un angle xOy et un point P autour duquel pivote une sécante APB; on construit le cercle AOB. Trouver et construire :

1° Le lieu des intersections mutuelles des tangentes au cercle aux points A, O, B;

2° Le lieu des extrémités du diamètre de ce cercle passant par P;

3° L'enveloppe de la polaire du point P;

4° L'enveloppe du cercle.

P. Barbarin.

268. — Soit un triangle ABC, sur les côtés duquel on prend trois points D, E, F tels que $AD \times BE \times CF = k^3$, k étant une longueur constante :

1° Si AE, BF, CD concourent en un point M, ce point décrit une cubique circonscrite à ABC;

2° Si D, E, F sont en ligne droite, cette droite enveloppe une courbe de troisième classe inscrite au triangle.

P. Barbarin.

269. — Étant donnés deux points A, B, on considère toutes les ellipses E qui ont A pour sommet d'un axe, et B pour sommet de l'autre;

1° Trouver le lieu des extrémités des diamètres conjugués égaux;

2° Trouver le lieu des foyers des ellipses E;

3° Démontrer qu'en chacun des points M où une des ellipses E est rencontrée par celle qui lui est infiniment voisine, la tangente à cette ellipse est perpendiculaire à un des diamètres conjugués égaux. En déduire que toutes les ellipses E sont enveloppées par une courbe parallèle à une ellipse.

P. Barbarin.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

PARIS — IMPRIMERIE CRAIN. — 9726-4-13.

3e Année. N° 9. Juin 1893.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

RÉSOLUTION DE L'EQUATION TRIGONOMÉTRIQUE DU SECOND DEGRÉ

$$A\cos^2 z + 2B\sin z\cos z + C\sin^2 z + 2D\cos z + 2E\sin z + F = 0.$$

Par M. **P. Barbarin**, professeur au Lycée de Bordeaux.

Les équations de ce type se rencontrant dans un certain nombre de problèmes, on peut essayer, pour les résoudre facilement, de les réduire au type linéaire classique

$$a\cos z + b\sin z = c.$$

Pour cela, on remarque que, λ étant une quantité finie, l'équation proposée est équivalente à la suivante :

$$(A+\lambda)\cos^2 z + 2B\sin z\cos z + (C+\lambda)\sin^2 z + 2D\cos z + 2E\sin z + F - \lambda = 0. \qquad (1)$$

Si l'indéterminée λ est choisie convenablement, le premier membre de cette équation est un produit de facteurs linéaires

$$(a\cos z + b\sin z - c)(a'\cos z + b'\sin z - c');$$

la résolution de l'équation est donc ramenée à celle des deux formes

$$\left.\begin{aligned} a\cos z + b\sin z - c &= 0, \\ a'\cos z + b'\sin z - c' &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Les valeurs de λ capables d'opérer cette transformation sont les racines de l'équation du troisième degré

$$\begin{vmatrix} A+\lambda & B & D \\ B & C+\lambda & E \\ D & E & F-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Calculons une de ses racines réelles; en la substituant à λ dans l'équation (1), et en résolvant celle-ci, on calculera les coefficients a, b, c, a', b', c', qui ont pour valeurs générales

$$\left.\begin{aligned} &\begin{cases} a = B - \sqrt{B^2 - (A+\lambda)(C+\lambda)}, \\ b = C + \lambda, \\ c = -E + \dfrac{BE - (C+\lambda)D}{\sqrt{B^2 - (A+\lambda)(C+\lambda)}}; \end{cases} \\ &\begin{cases} a' = B + \sqrt{B^2 - (A+\lambda)(C+\lambda)}, \\ b' = C + \lambda, \\ c' = -E - \dfrac{BE - (C+\lambda)D}{\sqrt{B^2 - (A+\lambda)(C+\lambda)}}. \end{cases} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

La réalité des valeurs de a, b, c sera assurée si $B^2 - (A+\lambda)(C+\lambda) > 0$. Admettons que λ satisfasse à cette inégalité; il faudra en outre que

$$c^2 \leqslant a^2 + b^2,$$

$$c'^2 \leqslant a'^2 + b'^2$$

pour que les valeurs de z puissent se calculer; la valeur réelle de λ que l'on a choisie pourra ainsi donner 0, 2 ou 4 séries indéfinies de valeurs pour z.

Si on avait $B^2 - (A + \lambda)(C + \lambda) = 0$, l'existence du coefficient c nécessiterait en outre

$$BE - (C + \lambda)D = 0.$$

Donc les coefficients de l'équation proposée devraient satisfaire à la condition

$$B^2(D^2 - E^2) + BDE(C - A) = 0$$

obtenue en éliminant $\lambda = \dfrac{BE - CD}{D}$ entre les deux relations précédentes; cette valeur de λ est d'ailleurs racine de l'équation (3). Mais il y a en outre la relation conditionnelle

$$E^2 - (C + \lambda)(F - \lambda) \geqslant 0,$$

sans quoi le coefficient c, qui dans ce cas a pour valeurs

$$c = -E + \sqrt{E^2 - (C + \lambda)(F - \lambda)}, \qquad c' = -E - \sqrt{E^2 - (C + \lambda)(F - \lambda)},$$

ne serait pas réel.

Exemple. — Appliquons la théorie précédente aux équations de la forme

$$\sin z \cos z - D \cos z - E \sin z = 0,$$

qui sont fréquentes.

On pourra toujours trouver un nombre positif m et un angle positif α moindre que 2π, tels que

$$D = m \sin \alpha, \qquad E = m \cos \alpha.$$

L'équation (3) donne alors $\lambda^3 + (m^2 - 1)\lambda - m^2 \sin 2\alpha = 0$,

et suivant que $4(m^2 - 1)^3 + 27m^4 \sin^2 2\alpha \lesseqgtr 0$,

on en tire trois valeurs réelles distinctes, ou deux valeurs égales, et une inégale, ou enfin une seule valeur réelle pour λ. Calculons maintenant a, b, c, en posant $\varepsilon = \pm 1$,

$$a = 1 - \varepsilon\sqrt{1 - \lambda^2},$$
$$b = \lambda,$$
$$c = m\left[\cos \alpha + \frac{\lambda \sin \alpha - \cos \alpha}{\varepsilon\sqrt{1 - \lambda^2}}\right];$$

dans le cas où $\lambda = \varepsilon$, nous prendrons

$$c = m \cos \alpha + \varepsilon\sqrt{m^2 \cos^2 \alpha + 1}.$$

Nous pourrons poser $\dfrac{\varepsilon\sqrt{1 - \lambda^2} - 1}{\lambda} = \operatorname{tg} \varphi$;

moyennant l'introduction de cet angle auxiliaire, l'équation

$$a \cos z + b \sin z = c$$

deviendra $\sin(z - \varphi) = \dfrac{m}{\varepsilon\sqrt{1 - \lambda^2}} \sin(\alpha + \varphi)$.

Si l'angle φ et le paramètre λ satisfont à la condition

$$\frac{m^2}{1 - \lambda^2} \sin^2(\alpha + \varphi) \leqslant 1.$$

on calculera un angle positif θ moindre que 2π, tel que

$$\sin \theta = -\frac{m}{\varepsilon\sqrt{1 - \lambda^2}} \sin(\alpha + \varphi),$$

d'où

$$z' = 2K\pi + \varphi + \theta,$$
$$z'' = (2K + 1)\pi + \varphi - \theta.$$

Si $\lambda = \varepsilon$, $\operatorname{tg} \varphi = -\varepsilon$, et $\sin \theta = \dfrac{1}{2}(m \pm \sqrt{m^2 + 2})$.

Application numérique à la question 84.

84. — x *et* y *étant les coordonnées d'un point d'un plan, tracer la courbe définie par l'équation*

$$y = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12} - 2x\right)}{\operatorname{tg} x}.$$

Déterminer :

1° Les coordonnées des points de contact des tangentes parallèles à l'axe des x ;

2° Les coordonnées des autres points où ces tangentes rencontrent la courbe.

(On donnera les résultats avec toute la précision que comporte l'emploi des tables de logarithmes à sept décimales.)

(Agrégation de Mathématiques, concours de 1890.)

I° Les points de contact des tangentes parallèles à Ox ont pour abscisses les racines de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin z \cos z - \sin(z + 15^\circ)}{\sin^2 x \cos^2 z} = 0,$$

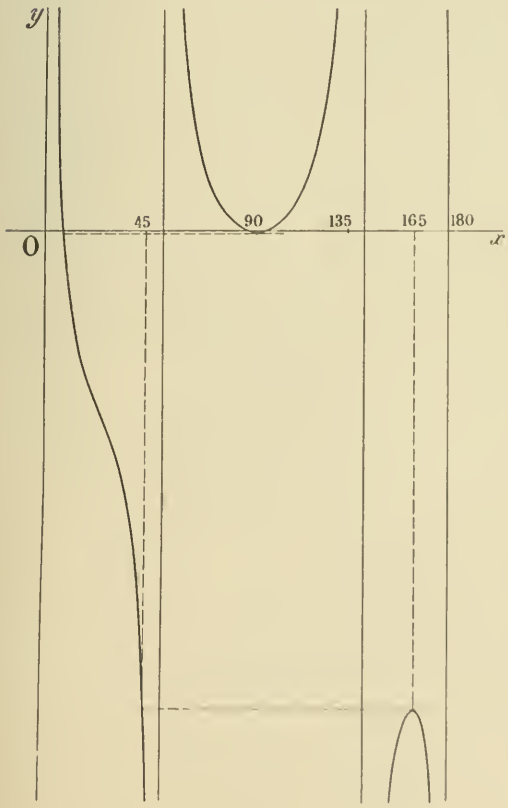
où on a fait pour abréger $\qquad 2x = z + 15^\circ.$

On a donc ici $m = 1$, $\alpha = 15^\circ$ et par conséquent $\lambda = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

La condition de réussite est ici seulement remplie avec $\varepsilon = +1$; il n'y a donc que deux valeurs pour z, et par suite pour x. D'ailleurs

$$z = 315^\circ = 270^\circ + 45^\circ$$

est une solution évidente que le calcul fera retrouver comme vérification.



II° Soient x' la valeur de x pour laquelle y est minimum et égal à y' et x'' la valeur de x pour laquelle y est maximum et égal à y''; en faisant $y = y'$ dans l'équation de la courbe, on a une équation du 3e degré en $\operatorname{tg} x$ dans laquelle le produit des racines égale $-\frac{\operatorname{tg} 15^\circ}{y'}$; donc les points où la tangente en ce minimum coupe de nouveau la courbe ont leurs abscisses données par

$$\operatorname{tg} x_1' = -\frac{\operatorname{tg} 15^\circ}{y' \operatorname{tg}^2 x'};$$

de même pour les points situés sur la tangente au maximum

$$\operatorname{tg} x_1'' = -\frac{\operatorname{tg} 15^\circ}{y'' \operatorname{tg}^2 x'}.$$

III° La forme de la courbe, limitée aux valeurs de x comprises entre 0 et 180°, qui donnent une période complète, est donc indiquée par la figure ci-contre.

Formules du calcul.	Résultats.
$\log \operatorname{tg} \varphi = \log \left[\sqrt{\sqrt[3]{4} - 1} - \sqrt[3]{2}\right],$	
$\log \sin \theta = \log \sqrt[3]{2} - \log \sqrt{\sqrt[3]{4} - 1} + \log \sin (15^\circ + \varphi),$	
$z' = \varphi + \theta \quad > 90^\circ,$	
$x' = \frac{z'}{2} + 7^\circ 30' > 90^\circ,$	$x' = 93^\circ 54' 1'',16.$
$\log y_1 = \log \operatorname{tg} (180^\circ - z') - \log \operatorname{tg} (180^\circ - x'),$	
$y' = - y_1$ (minimum),	$y' = - 0{,}00901549.$
$\log \operatorname{tg} x_1' = \log \operatorname{tg} 15^\circ - \log y_1 - 2 \log \operatorname{tg} (180^\circ - x'),$	$x_1' = 7^\circ 51' 56'',97.$
$z'' = 180^\circ - \theta + \varphi > 180^\circ + 90^\circ,$	
$x'' = \frac{z''}{2} + 7^\circ 30' \quad > 90^\circ,$	$x'' = 165^\circ.$
$\log y_2 = \log \operatorname{tg} (360^\circ - z'') - \log \operatorname{tg} (180^\circ - x'') = - \log \operatorname{tg} 15^\circ,$	
$y'' = - y_2$ (maximum),	$y'' = - 3{,}73205,$
$\log \operatorname{tg} x_1'' = \log \operatorname{tg} 15^\circ - \log y_2 - 2 \log \operatorname{tg} (180^\circ - x'') = 0.$	$x_1'' = 45^\circ.$
Vérification : $z'' = 315^\circ.$	

Calculs auxiliaires.

Calcul de $\sqrt[3]{2}$.

$\log 2 = 0.3010300$

$\frac{1}{3} \log 2 = 0{,}1003433$

361 12599

72

68.8 2

3.2 1

$\sqrt[3]{2} = 1{,}259921$

Calcul de $\sqrt{\sqrt[3]{4} - 1}$.

$\frac{2}{3} \log 2 = 0.2006866$

4 15874

2 01

$\sqrt[3]{4} = 1{,}587401$

$\sqrt[3]{4} - 1 = 0{,}587401$

58740 7689339

1 7

$\log (\sqrt[3]{4} - 1) = \bar{1}{,}7689346$

$\frac{1}{2} \log (\sqrt[3]{4} - 1) = \bar{1}.8844673$

68 76642

8 1

$\sqrt{\sqrt[3]{4} - 1} = 0{,}766421$

$- \frac{1}{2} \log (\sqrt[3]{4} - 1) = 0{,}1155327.$

Calculs définitifs.

Calcul de θ, z et x.

0,1003433

0,1155327

$\bar{1}{,}2908580$

$\log \sin \theta = \bar{1}{,}5067340$

269 18°44'0"

71

62 1"

9

6.2 0",1

2.8 0",05

$\theta = 18^\circ 44' 1'',15$

$z' = 172^\circ 28' 2'',32$

$\frac{z'}{2} = 86^\circ 14' 1'',16$

$x' = 93^\circ 54' 1'',16$

$z'' = 315^\circ$ à 0",02 près

$\frac{z''}{2} = 157^\circ,30'$

$x'' = 165^\circ.$

Calculs auxiliaires *(suite)*.

Calcul de φ.

$$\begin{array}{rll}
 & 1,259921 & \\
 & 0,766421 & \\
\hline
\operatorname{tg}(180^\circ - \varphi) = & 0,493500 & \\
\log \operatorname{tg}(180^\circ - \varphi) = & \bar{1},6932872 & \\
 & 404 & 26^\circ 15' 50'' \\
 & 468 & \\
 & 424 & 8'' \\
 & 44 & \\
 & 42,4 & 0'',8 \\
 & 1,6 & 0'',03 \\
\hline
 & 180^\circ - \varphi = & 26^\circ 15' 58'',83 \\
 & \varphi = & 153^\circ 44'\ 1'',17
\end{array}$$

Calcul de $\log \sin(15^\circ + \varphi)$.

$$\begin{array}{rll}
15^\circ + \varphi = & 168^\circ 44'\ 1'',17 & \\
180^\circ - (15^\circ + \varphi) = & 11^\circ 15' 58'',83 & \\
 & 11^\circ 15' 50'' & \bar{1},2907646 \\
 & 8'' & 846,4 \\
 & 0'',8 & 84,64 \\
 & 0'',03 & 3,174 \\
\hline
 & \log \sin(15^\circ + \varphi) = & \bar{1},2908580
\end{array}$$

Calcul de $\log \operatorname{tg}(180^\circ - z')$.

$$\begin{array}{ll}
7^\circ 31' 57'',68 & \\
7^\circ 31' 50'' & \bar{1},1212153 \\
7'' & 1134 \\
0'',6 & 97,2 \\
0'',08 & 12,96 \\
\hline
\log \operatorname{tg}(180^\circ - z') = & \bar{1},1213397
\end{array}$$

Calcul de $\log \operatorname{tg}(180^\circ - x')$.

$$\begin{array}{ll}
86^\circ 5' 58'',84 & \\
86^\circ 5' 50'' & 1,1660764 \\
8'' & 2481,6 \\
0'',8 & 248,16 \\
0'',04 & 12,408 \\
\hline
\log \operatorname{tg}(180^\circ - x') = & 1,1663506 \\
-\log \operatorname{tg}(180^\circ - x') = & \bar{2},8336494
\end{array}$$

$$\log \operatorname{tg} 15^\circ = \bar{1},4280525,$$
$$-\log \operatorname{tg} 15^\circ = 0,5719475.$$

Calculs définitifs *(suite)*.

Calcul de y_1 et y'.

$$\begin{array}{rll}
 & \bar{1},1213397 & \\
 & \bar{2},8336494 & \\
\hline
\log y_1 = & \bar{3},9549891 & \\
 & 50 & 90154 \\
 & 44 & 9 \\
\hline
 & y_1 = & 0,00901549 \\
 & y' = & -0,00901549
\end{array}$$

Calcul de x'_1.

$$\begin{array}{rll}
 & \bar{1},4280525 & \\
 & 2,0450109 & \\
 & \bar{3},6672988 & \\
\hline
\log \operatorname{tg} x'_1 = & \bar{1},1403622 & \\
 & 2538 & 7^\circ 51' 50'' \\
 & 1084 & \\
 & 932,4 & 6'' \\
 & 151,6 & \\
 & 139,86 & 0'',9 \\
 & 11,74 & 0'',07 \\
\hline
 & x'_1 = & 7^\circ 51' 56'',97
\end{array}$$

Calcul de y_2 et y''.

$$\begin{array}{rll}
\log y_2 = & 0,5719475 & \\
 & 16 & 37320 \\
 & 59 & 5 \\
\hline
 & y_2 = & 3,73205 \\
 & y'' = & -3,73205
\end{array}$$

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

208. — *On considère un cercle* C *et l'un de ses points* O. *Soit* M, *un point de la cissoïde droite dont* O *est le point de rebroussement et dont le cercle donné est le cercle générateur. Trouver le lieu du point d'intersection de* OM *avec la polaire de* M *par rapport au cercle* C. *Même problème pour la strophoïde,* O *étant le point double.*

1° Les coordonnées d'un point M appartenant à la cissoïde donnée peuvent être considérées comme fonction d'un paramètre t, de sorte que

$$y = tx, \qquad (1)$$
$$x = \frac{at^2}{1+t^2},$$

en désignant par a le diamètre du cercle générateur. La polaire du point M par rapport à ce cercle a pour équation

$$x(t^2 - 1) + 2t^3y - at^2 = 0. \qquad (2)$$

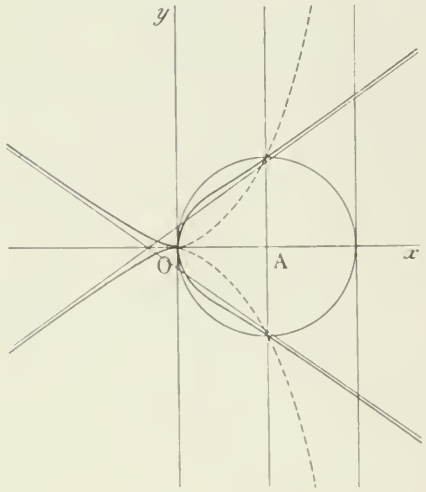
En éliminant t entre les équations (1) et (2), on aura l'équation du lieu demandé :

$$(x^2 + y^2)(2y^2 - x^2) - axy^2 = 0. \qquad (3)$$

Cette équation représente une quartique circulaire unicursale; l'origine est un point triple, les tangentes en ce point étant l'axe des x, qui est une tangente de rebroussement, et l'axe des y.

Les directions asymptotiques réelles sont fournies par l'équation

$$2y^2 - x^2 = 0.$$



Si l'on pose $y = \frac{x}{\sqrt{2}} + \delta$, l'équation de la courbe prend la forme

$$\frac{6}{\sqrt{2}}\left(\delta - \frac{a\sqrt{2}}{12}\right) + \frac{1}{x}\left[3\delta^2 - a\sqrt{2}\,\delta\right] + \ldots = 0.$$

Donc $\lim \delta = \frac{a\sqrt{2}}{12}$; l'équation de l'asymptote est

$$y = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{a\sqrt{2}}{12};$$

d'ailleurs, si

$$\delta = \frac{a\sqrt{2}}{12}, \quad 3\delta^2 - a\sqrt{2}\,\delta = \delta(3\delta - a\sqrt{2}) = \frac{a\sqrt{2}}{12}\left(\frac{a\sqrt{2}}{4} - a\sqrt{2}\right);$$

le coefficient de $\frac{1}{x}$ est donc négatif quand δ est suffisamment voisin de sa limite $\frac{a\sqrt{2}}{12}$; on en conclut que la différence infiniment petite $\delta - d$ est positive quand x croît indéfiniment par valeurs positives, et négative quand x croît indéfiniment par valeurs négatives. En outre, la courbe est symétrique par rapport à l'axe des x; on voit aussi que $2y^2 - x^2$ et x doivent avoir le même signe. Il résulte de là que la courbe représentée par l'équation (3) a la forme ci-dessus. Elle passe évidemment par les points communs au cercle et à la cissoïde donnés. Cette dernière est représentée en traits ponctués sur la figure.

2° L'équation de la strophoïde étant

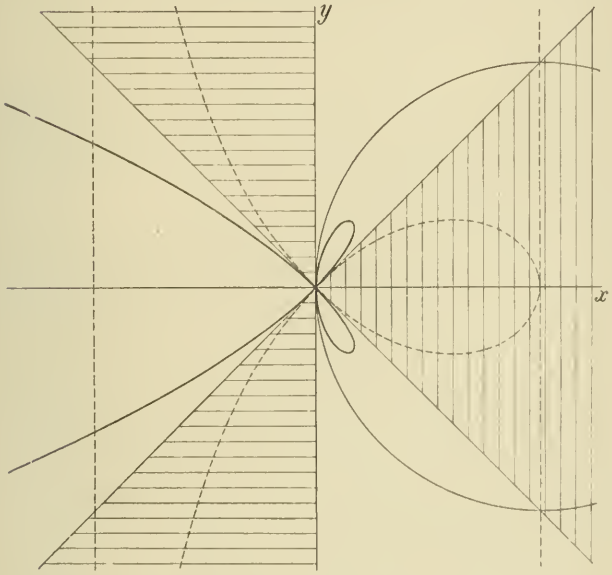
$$x(x^2 + y^2) + a(y^2 - x^2) = 0.$$

on peut définir les points M de cette courbe par les formules

$$y = tx, \qquad (4)$$
$$x = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2}.$$

Il convient d'appeler dans ce cas cercle générateur le cercle qui a pour équation

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0;$$



la polaire du point M par rapport à ce cercle a pour équation

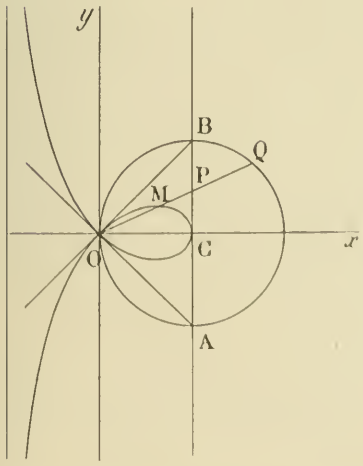
$$x(1-t^2)+ty(1-t^2)-x(1+t^2)-a(1-t^2)=0. \quad (5)$$

En éliminant t entre les équations (4) et (5), on obtient l'équation du lieu :

$$y^2(x^2+y^2)+ax(x^2-y^2)=0. \quad (6)$$

Cette courbe est une quartique circulaire unicursale ; l'origine est un point triple dont les tangentes sont l'axe des y et les bissectrices des angles des axes. L'axe des x est une direction asymptotique, mais il lui correspond des branches paraboliques. On voit que $x(x^2-y^2)$ doit être négatif, ce qui permet de déterminer des régions dans lesquelles ne se trouve aucun point de la courbe; ces régions sont couvertes de hachures sur la figure. La courbe a la forme ci-contre : sur cette figure, la strophoïde est indiquée en traits ponctués.

Remarque. — Nous avons supposé ici la strophoïde définie de la manière suivante. Étant donnés un cercle C de rayon a et un point O sur ce cercle, on prend sur chaque sécante issue du point O un segment $\overline{OM} = \overline{PQ}$, P étant le point de rencontre de la sécante avec le diamètre AB perpendiculaire à OC, et Q le second point d'intersection de la sécante OM avec le cercle. L'équation du cercle étant



$$x^2 + y^2 - 2ax = 0,$$

si l'on pose $\qquad y = tx,$

on en tire, pour l'abscisse du point Q :

$$x = \frac{2a}{1+t^2},$$

de sorte que l'abscisse de M est égale à

$$a - \frac{2a}{1+t^2} \quad \text{ou} \quad a\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

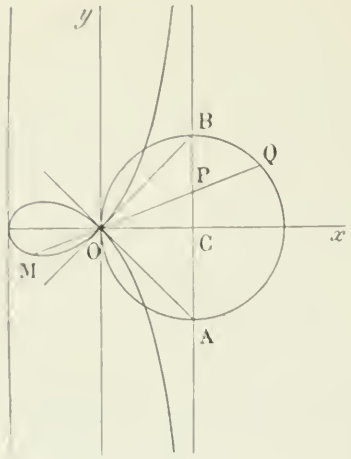
l'équation de la strophoïde s'obtient en remplaçant t par $\frac{y}{x}$ dans l'équation

$$x = a\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

ce qui donne $\qquad x(x^2+y^2) - a(x^2-y^2) = 0.$

On peut supposer le segment $\overline{OM}$ égal au segment $\overline{QP}$; alors la strophoïde est disposée symétriquement à la précédente par rapport au point O; son équation sera

$$x(x^2 + y^2) + a(x^2 - y^2) = 0;$$



un point aura pour coordonnées $x = a\dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$ $\quad y = tx$;

la polaire de ce point par rapport au cercle générateur a pour équation

$$x(t^2 - 1) + ty(t^2 - 1) - x(1 + t^2) - a(t^2 - 1) = 0;$$

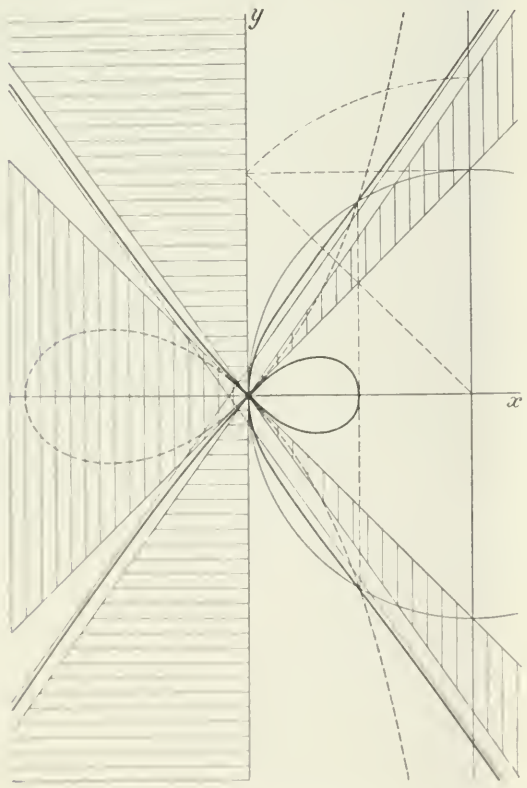
en remplaçant t par $\dfrac{y}{x}$, on aura l'équation du lieu du point de rencontre de OM avec sa polaire par rapport au cercle; on trouve ainsi

$$(x^2 + y^2)(y^2 - 2x^2) - ax(y^2 - x^2) = 0.$$

Cette courbe a pour directions asymptotiques réelles les droites

$$y^2 - 2x^2 = 0;$$

en posant $y = x\sqrt{2} + \delta$, l'équation prend la forme



$$6\sqrt{2}\left(\delta - \frac{a}{6\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{x}\left[3\delta^2 - 2a\delta\sqrt{2}\right] + \ldots = 0;$$

pour $\delta = \dfrac{a}{6\sqrt{2}}$ le coefficient de $\dfrac{1}{x}$ est égal à

$$\frac{a^2}{6\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - 2\sqrt{2}\right);$$

il est négatif : donc on voit d'abord que pour $\dfrac{1}{x} = 0$, $\lim \delta = \dfrac{a}{6\sqrt{2}}$; ensuite, si $\dfrac{1}{x}$ est infiniment petit, $\delta - \dfrac{a}{6\sqrt{2}}$ aura le signe de $\dfrac{1}{x}$. En remarquant que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des x, et que par un point (x, y) de cette courbe les polynomes $y^2 - 2x^2$ et $x(y^2 - x^2)$ doivent avoir le même signe, on peut aisément tracer cette courbe, qui a la forme suivante. La strophoïde est représentée en traits ponctués. La courbe rencontre évidemment le cercle aux points où ce cercle est lui-même rencontré par la strophoïde ci-contre.

La plupart de nos correspondants ont pris pour cercle générateur le cercle décrit sur la droite qui joint le point double de la strophoïde à son sommet, comme diamètre.

Dans cette hypothèse les coordonnées d'un point M de la strophoïde sont données par les formules

$$y = tx, \tag{4}$$

$$x = \frac{a(1 - t^2)}{1 + t^2};$$

la polaire de ce point par rapport au cercle $x^2 + y^2 - ax = 0$ est définie par l'équation

$$(1 - t^2)(2x - a) + 2y(1 - t^2)t - x(1 + t^2) = 0\,; \tag{5}$$

en éliminant t entre les équations (4) et (5), on trouve l'équation du second lieu demandé :

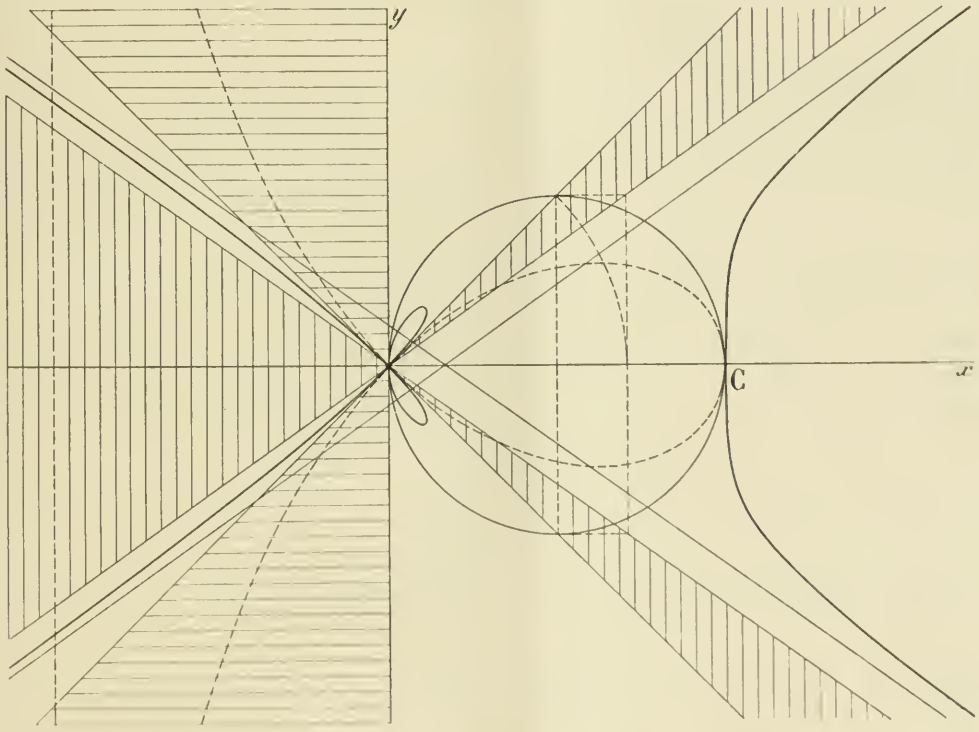
$$(x^2 + y^2)(2y^2 - x^2) - ax(y^2 - x^2) = 0. \tag{6}$$

Cette équation représente encore une quartique circulaire unicursale; l'origine est un point triple, les tangentes étant l'axe des y et les bissectrices des angles des axes. Les directions asymptotiques sont les mêmes que dans la courbe précédente. En posant

$$y = \frac{x}{\sqrt{2}} + \delta,$$

l'équation se met aisément sous la forme

$$\frac{6}{\sqrt{2}}\left(\delta + \frac{a\sqrt{2}}{12}\right) + \frac{1}{x}\left[3\delta^2 - a\sqrt{2}\delta\right] + \ldots = 0.$$



Si l'on pose $\delta = -\dfrac{a\sqrt{2}}{12}$, le coefficient de $\dfrac{1}{x}$ prend une valeur positive ; on en conclut que pour des valeurs positives de x suffisamment grandes, $\delta + \dfrac{a\sqrt{2}}{12}$ est négatif; c'est le contraire pour x négatif; on en déduit la disposition des branches infinies. En remarquant que la courbe est symétrique par rapport à Ox, et que les facteurs $2y^2 - x^2$ et $x(y^2 - x^2)$ doivent avoir le même signe, il est aisé de construire la courbe, qui a la forme indiquée plus haut.

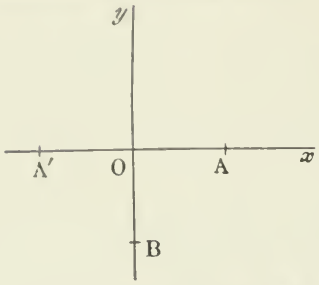
Ont résolu la question 208 : MM. Brillon, Duhameau (Amiens) ; H. Lambert (lycée d'Alger) ; Morel (au Creusot), Ch. Tesch (Ferrare), J. Vandier (Saint-Maixent).

Les autres solutions sont erronées.

ÉCOLE NAVALE (Concours de 1893).

Géométrie analytique.

270. — *Oxy étant deux axes rectangulaires, et* A, A′, B *trois points situés sur ces axes à une même distance de l'origine, disposés comme l'indique la figure,* OA = OA′ = OB = R :



1° Équation des paraboles circonscrites au triangle AA′B, *en prenant comme paramètre variable le coefficient angulaire* m *de l'axe.*

Par chaque point du plan passent deux *de ces paraboles; distinguer les régions du plan pour lesquelles ces deux paraboles sont réelles.*

Le lieu des points pour lesquels les axes de ces deux paraboles sont rectangulaires est une circonférence (C).

Construire en coordonnées polaires le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine O *sur les axes de toutes les paraboles circonscrites au triangle* ABA′.

2° Lorsqu'un point M *décrit la circonférence* (C), *le point de rencontre des axes des deux paraboles passant par ce point décrit également une circonférence.*

3° L'hyperbole équilatère, circonscrite au triangle ABA′ *et dont les axes sont parallèles aux axes des deux paraboles passant par un point* M *de la circonférence* (C), *passe par ce point* M.

1° L'équation générale des paraboles dont l'axe a pour coefficient angulaire m est

$$(y - mx)^2 + 2\lambda x + 2\mu y + \nu = 0.$$

Ces paraboles coupent l'axe Ox aux points dont les abscisses sont les racines de l'équation

$$m^2x^2 + 2\lambda x + \nu = 0.$$

Ces abscisses doivent être $-$ R et $+$ R; on doit donc avoir

$$\lambda = 0, \qquad \text{et} \qquad \nu = -m^2R^2.$$

La condition pour que ces paraboles passent en B ($x = 0$, $y = -$ R) est

$$R^2 - 2\mu R + \nu = 0,$$

et, en tenant compte de la valeur de ν,

$$R^2 - 2\mu R - m^2R^2 = 0.$$

d'où l'on tire

$$2\mu = R(1 - m^2).$$

L'équation générale des paraboles qui remplissent toutes les conditions indiquées est donc

$$(y - mx)^2 + R(1 - m^2)y - m^2R^2 = 0. \qquad (1)$$

Soient x_1, y_1 les coordonnées d'un point donné dans le plan; écrivons que la parabole représentée par l'équation (1) passe par ce point et déterminons la valeur correspondante de m.

Nous avons à résoudre l'équation

$$(y_1 - mx_1)^2 + R(1 - m^2)y_1 - m^2R^2 = 0,$$

qui, ordonnée par rapport à l'inconnue m, devient

$$(x_1^2 - Ry_1 - R^2)m^2 - 2mx_1y_1 + y_1(y_1 + R) = 0. \qquad (2)$$

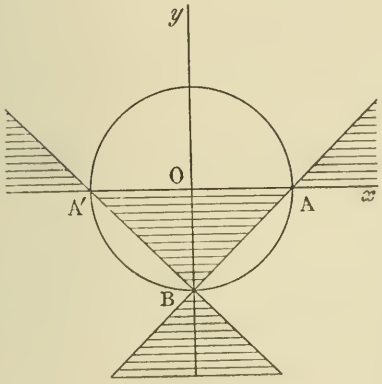
Elle est du second degré et donne pour m deux valeurs réelles ou imaginaires à chacune desquelles correspond une parabole représentée par l'équation (1). Ainsi par chaque point du plan passent deux paraboles réelles ou imaginaires.

Pour qu'elles soient réelles, il faut et il suffit que l'équation (2) ait ses racines réelles, c'est-à-dire que l'on ait $$x_1^2y_1^2 - y_1(y_1 + R)(x_1^2 - Ry_1 - R^2) \geqslant 0$$
ou après simplification, $$y_1(R + y_1 + x_1)(R + y_1 - x_1) \geqslant 0.$$

Construisons les deux droites représentées par les équations
$$x + y + R = 0 \qquad \text{et} \qquad x - y - R = 0.$$

Ce sont les droites A'B et AB; elles forment avec $y = 0$ un triangle AA'B dont les côtés sont indéfiniment prolongés; elles partagent le plan en sept régions. Si le point donné est dans l'une des régions couvertes de hachures, les paraboles ne sont pas réelles; s'il est dans l'une des trois autres régions, les paraboles sont réelles.

Lieu des points pour lesquels les axes des paraboles sont rectangulaires. — Pour que les axes des deux paraboles qui passent par le point x_1y_1 soient rectangulaires, il faut et il suffit que le produit des racines de l'équation (2) soit égal à -1, c'est-à-dire que l'on ait
$$x_1^2 - Ry_1 - R^2 + y_1(y_1 + R) = 0,$$
ou bien $$x_1^2 + y_1^2 - R^2 = 0.$$



Cette égalité est la condition nécessaire et suffisante pour que le point par lequel passent les deux paraboles appartienne à la circonférence
$$x^2 + y^2 - R^2 = 0, \qquad (C)$$
circonscrite au triangle donné ABA'.

Lieu du pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine O *sur les axes de toutes les paraboles circonscrites au triangle* ABA'. — Les axes de toutes les paraboles représentées par l'équation (1) sont donnés par la formule connue $Af'_x + Bf'_y = 0$ ou $Bf'_x + Cf'_y = 0$. L'application de cette dernière formule conduit à l'équation
$$m^2(y - mx) + (y - mx) + \frac{R}{2}(1 - m^2) = 0$$
ou bien $$y - mx + \frac{R}{2}\cdot\frac{1 - m^2}{1 + m^2} = 0. \qquad (3)$$

L'équation de la perpendiculaire abaissée sur cette droite du point O, origine des coordonnées, est
$$y = -\frac{1}{m}x, \qquad \text{d'où} \qquad m = -\frac{x}{y}.$$

En écrivant que ces deux équations sont satisfaites par la même valeur de m, on a l'équation du lieu. On trouve
$$y + \frac{x^2}{y} + \frac{R}{2}\cdot\frac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2} = 0$$
ou bien $$(x^2 + y^2)^2 + \frac{Ry}{2}(y^2 - x^2) = 0.$$

A chacun des points de cette courbe correspond une valeur de m; ils conviennent donc tous. Transformée en coordonnées polaires, cette équation devient
$$\rho = \frac{R}{2}\sin\omega\cos 2\omega.$$

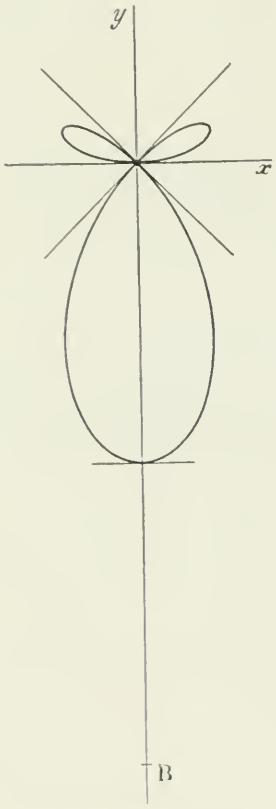
Avant de construire cette courbe, remarquons que ρ reprend la même valeur quand on attribue à ω deux valeurs ayant pour somme π, de sorte que la courbe est symétrique par rapport à l'axe Oy. En

outre, à deux valeurs de ω ayant pour différence π correspondent des valeurs de ρ de somme nulle : car

$$\sin\omega\cos 2\omega = -\sin(\omega+\pi)\cos(2\omega+2\pi).$$

Il en résulte que les valeurs ω et $\omega+\pi$ conduisent à un même point, et il nous suffit de faire varier ω de zéro à π, ou même de zéro à $\frac{\pi}{2}$ à cause de la symétrie par rapport à Oy.

La fonction ρ est évidemment finie et continue pour toutes les valeurs de la variable ω. Elle est nulle pour $\omega = 0$ et aussi pour $\omega = \frac{\pi}{4}$; elle est positive, ω variant de zéro à $\frac{\pi}{4}$ et négative quand ω est compris entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$.



Calculons la dérivée

$$\rho' = \frac{R}{2}(\cos\omega\cos 2\omega - 2\sin 2\omega\sin\omega)$$
$$= \frac{R}{2}[\cos\omega(\cos^2\omega - \sin^2\omega) - 4\sin^2\omega\cos\omega]$$
$$= \frac{R}{2}\cos\omega(\cos^2\omega - 5\sin^2\omega).$$

Cette dérivée, d'abord positive quand ω part de zéro, s'annule quand on a

$$\operatorname{tg}\omega = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}.$$

Il existe, comme on pouvait le prévoir, un angle α compris entre zéro et $\frac{\pi}{4}$ satisfaisant à cette équation. Quand ω dépasse α, la dérivée devient négative et reste négative jusqu'à ce que ω ait atteint la valeur $\frac{\pi}{2}$ pour laquelle la dérivée s'annule de nouveau en changeant de signe.

ω	ρ'	ρ
0	$\frac{R}{2}$	0
	$+$	croît
α	0	$\frac{R}{3\sqrt{6}}$ max
	$-$	décroît
$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{R}{\sqrt{2}}$	0
	$-$	décroît
$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{R}{2}$ min

Les résultats de cette discussion sont inscrits dans le tableau ci-contre dans lequel nous inscrivons en outre les valeurs remarquables de la dérivée et de la fonction.

Il ne reste plus qu'à tracer la courbe qui figure cette variation.

2° Imaginons qu'un point $M(x_1, y_1)$ décrive la circonférence (C); et soit φ l'angle compris entre zéro et 2π que devrait décrire une demi-droite d'abord appliquée sur Ox pour s'appliquer sur le rayon OM; on peut alors poser

$$x_1 = R\cos\varphi, \qquad y_1 = R\sin\varphi,$$

et l'équation (2) dont les racines sont les coefficients angulaires des axes des paraboles passant par le point x_1, y_1 devient

$$(\cos^2\varphi - \sin\varphi - 1)m^2 - 2m\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi(1+\sin\varphi) = 0$$

ou bien

$$\sin\varphi(1+\sin\varphi)m^2 + 2m\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi(1+\sin\varphi) = 0.$$

Le facteur $\sin\varphi$ n'est pas nul ni égal à -1; sans quoi le point M coïnciderait avec l'un des trois points A, A', B et les paraboles ne seraient plus déterminées, puisqu'on en connaîtrait seulement trois

points. L'équation qui donne m peut donc s'écrire

$$m^2 + \frac{2\cos\varphi}{1+\sin\varphi}\, m - 1 = 0.$$

Le coefficient de m peut s'écrire

$$\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)} = \frac{4\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)} = 2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right);$$

remarquons que si l'on fait varier φ de zéro à 2π, l'angle $\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}$ prend toutes les valeurs inférieures à $\frac{\pi}{4}$ et supérieures à $-\frac{3\pi}{4}$ et la tangente de cet angle prend une fois et une seule toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$. Pour abréger l'écriture, posons

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right) = \lambda;$$

l'équation qui donne les deux valeurs de m correspondant au point choisi M devient

$$m^2 + 2\lambda m - 1 = 0. \qquad (4)$$

Si l'on en tient compte, l'équation (3) de l'axe d'une parabole se simplifie; on a, en effet

$$1 - m^2 = 2\lambda m. \qquad \text{d'où} \qquad 1 + m^2 = 2 - 2\lambda m.$$

L'équation (3) devient $\qquad y - mx + \frac{R}{2}\cdot\frac{\lambda m}{1-\lambda m} = 0.$

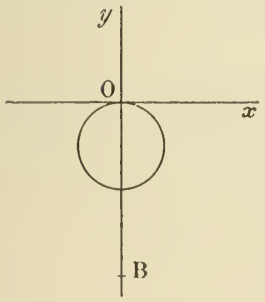
Cette équation, ordonnée par rapport à m, s'écrit

$$2\lambda x m^2 + (R\lambda - 2x - 2\lambda y)m + 2y = 0. \qquad (5)$$

Si dans cette équation on remplace m successivement par les valeurs des deux racines de l'équation (4), on a les équations des axes des deux paraboles qui passent par le point M choisi, axes qui se coupent en un point du lieu cherché. Il en résulte que si x et y désignent les coordonnées d'un point de ce lieu, les équations (4) et (5) ont leurs racines communes, c'est-à-dire que l'on a

$$2\lambda x = \frac{R\lambda - 2x - 2\lambda y}{2\lambda} = -2y.$$

Tout point du lieu est donc à l'intersection des deux droites représentées par ces équations et nous aurons l'équation du lieu en éliminant entre ces équations le paramètre variable λ. On peut les écrire



$$\lambda x + y = 0,$$
$$\lambda(R + 2y) - 2x = 0.$$

L'équation du lieu est donc

$$2x^2 + 2y^2 + Ry = 0.$$

Elle représente un cercle dont le centre est au point $x = 0$, $y = -\frac{R}{4}$ et qui passe à l'origine des coordonnées.

Tout point de ce cercle répond à la question, car il suffit de donner à λ la valeur $-\frac{y}{x}$ pour obtenir le point x, y du lieu; or on a vu que λ prend une fois toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$.

3° Les coefficients angulaires des axes d'une conique quelconque représentée par l'équation sont les racines de l'équation $\qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \ldots = 0$

$$m^2 + \frac{A-C}{B}\, m - 1 = 0;$$

il faut et il suffit pour que les axes soient parallèles aux axes des deux paraboles qui passent par M, que l'on ait

$$\frac{A - C}{B} = \frac{2 \cos \varphi}{1 + \sin \varphi},$$

et l'on satisfait à cette condition en prenant

$$A - C = 2 \cos \varphi, \quad B = 1 + \sin \varphi.$$

Pour que cette conique soit une hyperbole équilatère, il faut et il suffit que l'on ait

$$A + C = 0, \quad \text{d'où} \quad A = \cos \varphi, \quad C = - \cos \varphi.$$

Toutes les hyperboles équilatères dont les axes sont parallèles aux axes de nos deux paraboles ont donc pour équation

$$x^2 \cos \varphi + 2(1 + \sin \varphi)xy - y^2 \cos \varphi + 2\lambda x + 2\mu y + \nu = 0.$$

Et pour qu'elles soient circonscrites au triangle AA'B, il faut et il suffit que l'on ait

$$\lambda = 0, \quad \nu = - R^2 \cos \varphi, \quad \mu = - R \cos \varphi.$$

L'hyperbole équilatère qui remplit toutes ces conditions a donc pour équation

$$x^2 \cos \varphi + 2(1 + \sin \varphi)xy - y^2 \cos \varphi - 2Ry \cos \varphi - R^2 \cos \varphi = 0.$$

Si l'on y remplace x par $R \cos \varphi$ et y par $R \sin \varphi$, on a après avoir divisé tous les termes par $R^2 \cos \varphi$

$$\cos^2 \varphi + 2(1 + \sin \varphi) \sin \varphi - \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi - 1 = 0,$$

ce qui est une identité.

Remarques. **I.** — On sait que la condition nécessaire et suffisante pour que les quatre points d'intersection de deux paraboles soient sur un cercle est que les axes de ces coniques soient perpendiculaires. Si donc deux paraboles circonscrites au triangle ABA' ont leurs axes perpendiculaires, leur quatrième point commun est nécessairement sur la circonférence circonscrite au triangle ABA', et réciproquement.

La même observation s'applique à l'hyperbole équilatère circonscrite au même triangle et qui a un axe parallèle à l'axe de l'une de ces deux paraboles; elle coupe cette parabole sur la même circonférence.

II. — On peut trouver le lieu du point de rencontre des axes des deux paraboles en remarquant que par chaque point du plan passent, en général, trois axes de paraboles circonscrites au triangle ABA'. Leurs coefficients angulaires sont les racines de l'équation du troisième degré

$$2xm^3 - (2y - R)m^2 + 2xm - (2y + R) = 0.$$

Le produit des racines est $\frac{2y + R}{2x}$; pour que deux d'entre elles aient pour produit -1, il faut et il suffit que $-\frac{2y + R}{2x}$ soit une racine, pourvu toutefois que cette racine ne soit pas nulle.

La condition pour que $-\frac{2y + R}{2x}$ soit racine est

$$(2y + R)^3 + (2y - R)(2y + R)^2 + 8x^2(2y + R) = 0,$$

ou, après la suppression du facteur $2y + R$ qui ne doit pas être nul,

$$(2y + R)^2 + 4y^2 - R^2 + 8x^2 = 0,$$

ou bien

$$2x^2 + 2y^2 + Ry = 0.$$

C'est bien le cercle qu'on a trouvé plus haut. E. D.

CONCOURS DE 1893

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Physique et Chimie.

Physique. I. — Exposer la méthode générale des mélanges qui sert à mesurer la chaleur de fusion d'un corps qui est liquide à la température ordinaire.

II. — Application de cette méthode à la mesure de la chaleur de fusion et de la chaleur spécifique de la glace.

Chimie. — Décrire la méthode de préparation de l'hydrogène à l'aide du flacon à deux tubulures. — Indiquer les corps mentionnés au programme qui se préparent avec le même appareil, en ne donnant pour tous ces corps (y compris l'hydrogène) que les formules de préparations.

(29 mai, de 7 h. à 10 h.)

Mathématiques.

I. — **271.** — Étant donnés un plan et deux sphères S, S′, de rayons R et R′, ayant leur centre dans ce plan, on considère une sphère variable, Σ, tangente aux deux premières et au plan. — On demande :

1° Le lieu géométrique du point de contact de la sphère Σ avec le plan donné ;

2° Le lieu géométrique du centre de la sphère Σ.

II. — **272.** — On donne deux sphères de centres C, C′, et un cône de révolution de sommet O, dont l'axe est perpendiculaire au plan COC′ ; le triangle COC′ est rectangle en O. — On demande : 1° de former les équations du lieu des centres des sphères tangentes au cône et aux deux sphères données ; 2° de discuter la nature de ce lieu dans le cas où le triangle rectangle COC′ devient isocèle, où les sphères données sont égales, et où, de plus, la sphère variable touche les sphères données toutes deux extérieurement, ou toutes deux intérieurement.

(30 mai, de 7 h. à 11 h.)

Calcul trigonométrique.

On donne dans un triangle deux côtés et l'angle compris, savoir :

$$a = 52725^{m}89, \quad b = 45586^{m}54, \quad C = 55^{\circ}\ 43'\ 27''63.$$

Calculer le côté c, les deux angles A et B, et la surface.

(30 mai, de 4 h. 1/2 à 6 h.)

Géométrie descriptive.

273. — On donne un cube de 16^{cm} de côté : sa face postérieure est dans le plan vertical ; l'arête inférieure de cette face est sur une ligne parallèle aux petits côtés de la feuille, à $21^{cm}5$ du bord inférieur, et l'extrémité droite de cette arête est à $2^{cm}5$ du bord droit de la feuille. Une sphère est inscrite dans ce cube.

Un cône de révolution, tangent à la face inférieure du cube, a son sommet au centre de cette face, et son axe passe par le sommet antérieur de gauche de la face supérieure du cube.

On demande de représenter :

1° Le solide commun au cône et à la sphère, en trait noir plein pour les parties vues, et en points noirs ronds pour les parties cachées ; on indiquera en traits rouges la construction d'un point quelconque de l'intersection et des points remarquables, ainsi que celle des tangentes en ces points :

2° La projection en trait noir plein de la courbe d'intersection du cône et de la sphère sur un plan vertical parallèle à l'axe du cône et situé à $12^{cm}5$ du centre de la sphère.

(31 mai, de 7 h. à 11 h.)

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Mathématiques.

274. — 1° Les coordonnées des points d'une courbe (C) étant représentées par les formules

$$x = \frac{2}{t-a}, \qquad y = \frac{2}{t-b}, \qquad z = \frac{2}{t-c},$$

où t désigne un paramètre variable et a, b, c sont trois constantes *différentes*, on considère tous les segments de droite dont les deux extrémités sont sur la courbe (C) et on demande de trouver la surface (S), lieu des milieux M de ces cordes.

2° Démontrer que la surface (S) contient la courbe (C) et ses trois asymptotes.

3° Montrer qu'à chaque point M de cette surface correspond une seule corde de la courbe (C) ayant son milieu en M. Discuter analytiquement et mettre ainsi en évidence trois droites tracées sur la surface (S).

4° Délimiter la région du plan des xy où doit se projeter un point M de la surface (S) pour que la corde dont ce point est le milieu joigne deux points réels de la courbe (C).

5° Trouver toutes les droites situées à distance finie sur la surface (S).

6° Trouver le lieu des cordes de la courbe (C) dont les milieux sont sur une droite.

(12 juin, Durée 6 heures.)

Physique.

I. — **275.** — Une sphère de verre, de rayon a, est percée d'une cavité sphérique, concentrique, de rayon b, remplie de mercure. Un point lumineux est placé extérieurement à une distance D du centre.

On demande :

1° D'étudier la marche des rayons centraux;

2° De distinguer les différentes régions que les rayons marginaux éclairent, soit par transmission, soit par reflexion sur le mercure.

On examinera l'influence de la dispersion.

II. — **276.** — Une goutte d'eau à zéro, pesant un demi-gramme, est placée dans une cavité au fond d'un cylindre de 20 centimètres de diamètre, dont les parois sont rigoureusement imperméables à la chaleur. Un piston, poussé à fond, ne laisse qu'un espace nuisible négligeable; on soulève ce piston de 38 centimètres; il ne reste plus qu'un globule de glace à zéro.

On demande :

1° Quel est le poids de la glace;

2° Quelle est la chaleur de fusion de la glace.

Tension maxima de la vapeur d'eau à zéro . . . . . $4^{mm},6$

Chaleur de volatilisation de l'eau à zéro . . . . . 660.

Pour répéter l'expérience classique de Leslie, on met ordinairement la goutte d'eau dans un bouchon placé à peu de distance au-dessus d'un large cristallisoir contenant de l'acide sulfurique concentré. Quel rôle joue cet acide sulfurique?

(13 juin, Durée 6 heures.)

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

PARIS — IMPRIMERIE CHAIX. — 12182-5-93.

3e Année. N° 10. Juillet 1893.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES (Concours de 1892.)

221. — *On demande à quel taux d'intérêt on doit emprunter une somme* A *que l'on veut rembourser au moyen de deux paiements égaux à* a *qui doivent être effectués, le premier au bout de deux, le second au bout de quatre années : discuter la solution.*

(Cours préparatoires.)

Soit x l'intérêt de 1fr pendant un an. Au bout de deux ans, on doit $A(1+x)^2$; on paie a, il reste dû $A(1+x)^2 - a$, et au bout de deux ans la somme due devient

$$[A(1+x)^2 - a](1+x)^2 \qquad \text{ou} \qquad A(1+x)^4 - a(1+x)^2,$$

et cette somme doit être égale à a.

On a donc l'équation $$A(1+x)^4 - a(1+x)^2 - a = 0.$$

Cette équation admet pour $(1+x)^2$ une seule racine positive, et cette racine devra être supérieure à 1 pour permettre de calculer x.

En remplaçant $(1+x)^2$ par 1, le premier membre de l'équation devient $A - 2a$. On doit donc avoir

$$A - 2a > 0;$$

et si cette condition est remplie, x est donné par

$$(1+x)^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4Aa}}{2A},$$

$$x = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + 4Aa}}{2A}} - 1.$$

DELACOURCELLE, conducteur des Ponts et Chaussées, à Marchenoir (Loir-et-Cher).

Ont résolu la même question : MM. A. BAILLY, lycée de Dijon ; Paul BIGOT, lycée de Marseille ; E. GUERDEN, lycée Saint-Louis ; J. MOSSERY, à Paris.

---

222. — *Lieu des centres des coniques semblables entre elles qui passent par trois points donnés : cas particulier des hyperboles équilatères.*

(Cours préparatoires.)

Soit ABC le triangle formé par les trois points; prenons pour axes CB et CA et posons $CB = 2a$, $CA = 2b$, $\widehat{ACB} = \theta$.

L'équation générale des coniques circonscrites au triangle ABC est

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - 2Aax - 2Cby = 0.$$

Pour que ces coniques soient semblables entre elles, il faut qu'on ait

$$\frac{4(B^2 - AC)\sin^2\theta}{(A + C - 2B\cos\theta)^2} = k, \qquad (1)$$

k étant, si les coniques sont des hyperboles, une constante positive et égale à $\operatorname{tg}^2 V$, V désignant l'angle des asymptotes; k étant négatif et égal à $-\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}$, si les coniques sont des ellipses, a et b désignant les demi-longueurs d'axes.

Si l'on remarque que $\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}$ est constamment inférieur à l'unité, on voit que la constante k pourra recevoir toutes les valeurs comprises entre -1 et $+\infty$.

Le centre sera donné par les équations

$$Ax + By - Aa = 0, \tag{2}$$

$$Bx + Cy - Cb = 0. \tag{3}$$

En éliminant A, B, C entre les équations (1), (2), (3), on aura l'équation du lieu.

Des équations (2) et (3) on tire

$$\frac{A}{y(y-b)} = \frac{C}{x(x-a)} = \frac{B}{-(x-a)(y-b)},$$

et comme l'équation (1) est homogène en A, B, C, on peut y remplacer ces quantités par les dénominateurs correspondants. On obtient ainsi

$$k[x(x-a) + y(y-b) + 2(x-a)(y-b)\cos\theta]^2 - 4\sin^2\theta[(x-a)^2(y-b)^2 - xy(x-a)(y-b)] = 0.$$

Le lieu est une courbe du quatrième degré qui admet pour points doubles les milieux des côtés du triangle ABC. On voit par exemple que le milieu de AB est un point double en remarquant que le premier membre de l'équation peut se décomposer en une somme de termes renfermant au deuxième degré les quantités $x - a$ et $y - b$.

Transportons l'origine des coordonnées au milieu de AB; l'équation devient

$$k[x(x+a) + y(y+b) + 2xy\cos\theta]^2 - 4\sin^2\theta xy[xy - (x+a)(y+b)] = 0.$$

ou

$$k(x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta + ax + by)^2 + 4\sin^2\theta xy(bx + ay + ab) = 0.$$

Pour construire cette courbe, on pourrait poser $y = tx$; il sera plus simple de ramener sa discussion à celle d'une conique par la transformation inverse dont il a été déjà parlé au tome Ier (page 10) de cette *Revue*. Le procédé s'applique d'ailleurs à toute quartique trinodale.

Pour cela, nous passerons en coordonnées trilatères en prenant comme triangle de référence le triangle qui a pour sommets les milieux A′, B′ et C′ des côtés BC, CA et AB.

Comme $x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta + ax + by$, x, y, $bx + ay + ab$ sont respectivement les premiers membres des équations du cercle circonscrit au triangle A′B′C′ et des côtés B′C′, C′A′ et A′B′ et que d'autre part, en coordonnées normales, les premiers membres des équations de ces lignes sont $aYZ + bZX + cXY$, Y, X, Z, l'équation du lieu pourra s'écrire

$$(aYZ + bZX + cXY)^2 + hXYZ(aX + bY + cZ) = 0,$$

h étant une constante qu'il faut déterminer. Nous avons introduit le facteur $aX + bY + cZ$ afin que l'équation fût homogène.

Pour déterminer h, nous remarquerons que les équations de l'ensemble des tangentes au point C′ dans les deux systèmes de coordonnées peuvent s'écrire

$$k(ax + by)^2 + 4abxy\sin^2\theta = 0,$$

$$(aY + bX)^2 + hcXY = 0;$$

en outre, x et y étant proportionnels à Y et X, pour que ces deux équations représentent les mêmes droites, il faut que

$$hc = \frac{4ab\sin^2\theta}{k},$$

ou en remarquant que θ est égale à l'angle C' du triangle de référence et que

$$\frac{\sin^2 C'}{c^2} = \frac{1}{4R^2}$$

et

$$abc = 4RS,$$

R et S désignant le rayon du cercle circonscrit et la surface du triangle $A'B'C'$, il vient

$$h = \frac{4S}{Rk},$$

et l'équation du lieu peut alors s'écrire

$$kR(aYZ + bZX + cXY)^2 + 4SXYZ(aX + bY + cZ) = 0.$$

Cela posé, à un point M (X, Y, Z) de cette courbe, faisons correspondre un point M′ (X′, Y′, Z′)′ déterminé par les relations

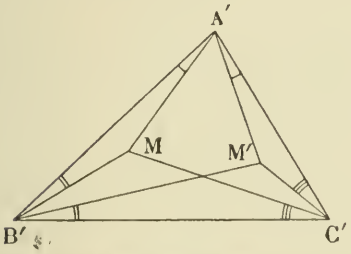
$$XX' = YY' = ZZ'.$$

Pour construire le point M′, il suffit d'observer que les droites A′M, A′M′; B′M, B′M′; C′M, C′M sont symétriques respectivement par rapport aux bissectrices des angles A′, B′, C′ du triangle de référence.

L'équation devient alors

$$kR(aX' + bY' + cZ')^2 + 4S(aY'Z' + bZ'X' + cX'Y') = 0.$$

Elle représente un cercle concentrique au cercle circonscrit au triangle A′B′C′. Il est aisé d'avoir son rayon.



En effet, soient H et K les points de rencontre de ce cercle avec B′C′; désignons par Z_1 et Z_2 les troisièmes coordonnées trilatères de ces points; on a

$$\overline{B'H}.\overline{B'K} = \frac{Z_1Z_2}{\sin^2 B'}.$$

En désignant par O le centre du cercle circonscrit, par R le rayon de ce même cercle et par R′ le rayon du cercle que nous étudions, on aura

$$\overline{B'H}.\overline{B'K} = \overline{B'O}^2 - R'^2 = R^2 - R'^2,$$

d'où

$$R'^2 = R^2 - \frac{Z_1Z_2}{\sin^2 B'}.$$

Or Z_1 et Z_2 sont déterminés par les deux équations

$$kR(bY' + cZ')^2 + 4aSY'Z' = 0,$$

$$bY' + cZ' = 2S.$$

En éliminant Y′ on obtient

$$-\frac{4acS}{b}Z'^2 + \frac{8aS^2}{b}Z' + 4kRS^2 = 0.$$

d'où l'on déduit

$$\frac{Z_1Z_2}{\sin^2 B'} = -R^2k$$

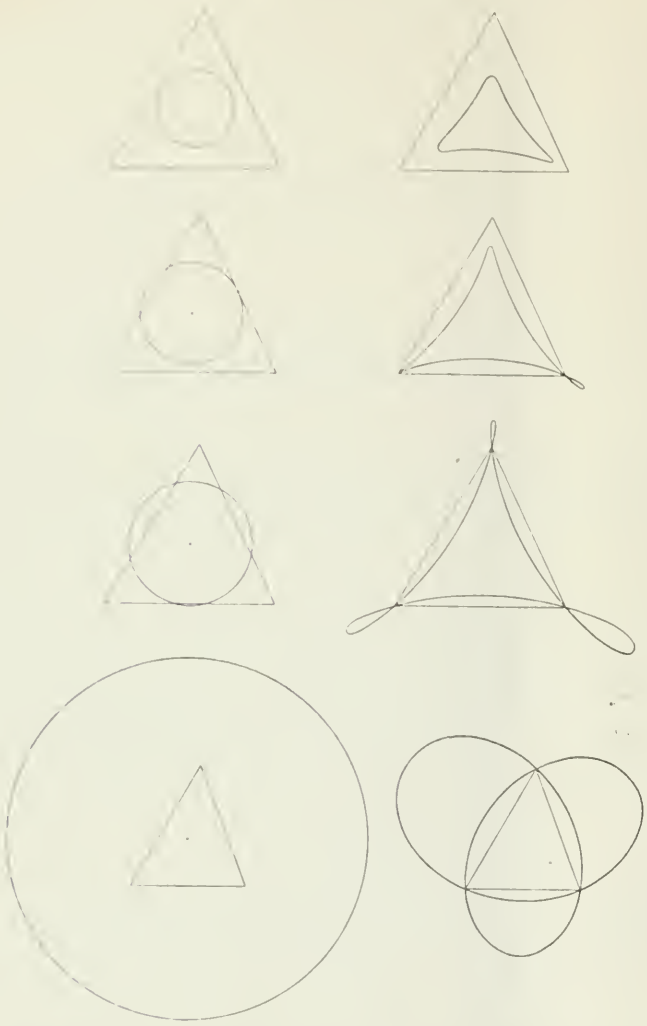
et par suite

$$R'^2 = R^2(1 + k).$$

Comme k est toujours supérieur à -1, on voit que R′ est toujours réel.

Si les coniques sont des ellipses, $R' < R$; si ce sont des hyperboles, $R' > R$.

Ce cercle peut donc se construire connaissant k, et ayant construit ce cercle on en déduira la forme de la quartique, d'après la construction indiquée.



A tous les points de B′C′ correspond le point A′; donc, pour que le point A′ soit point double à tangentes réelles, il faudra que le cercle rencontre B′C′ en des points réels. Les tangentes en A′ seront les symétriques, par rapport à la bissectrice de l'angle A′, des droites joignant le point A′ aux points de rencontre du cercle avec B′C.

Si le cercle est tangent à B′C′, A′ sera point de rebroussement; enfin si le cercle ne rencontre pas B′C′, A′ est un point isolé.

Il sera donc facile de se rendre compte de la forme de la quartique quand R′ varie de 0 à $+\infty$. On obtient ainsi, pour le cercle et sa transformée les formes ci-contre :

Cas particuliers. — Pour $k=-1$, $R'=0$; le lieu se réduit à un point. En effet dans ce cas, les coniques sont des cercles, et il existe un seul cercle passant par trois points.

Pour $k=0$, $R'=R$; dans ce cas, les coniques données sont des paraboles, le centre est à l'infini. Si on se reporte à l'équation de la quartique, on trouve les trois côtés du triangle A′B′C′ qui peuvent être considérés comme lieu de centres des paraboles singulières formées par exemple, du côté BC et de la parallèle menée par le point A.

Enfin quand k est infini, les coniques sont des hyperboles équilatères; l'équation de la quartique se réduit à

$$aYZ + bZX + cXY = 0,$$

qui représente le cercle circonscrit au triangle A′B′C′, c'est-à-dire le cercle des neuf points du triangle ABC.

L. P. Randon.

Ont résolu la même question : MM. Barisien; L. Fassal, lycée de Toulouse; Paul Begou, lycée de Marseille; Paul Fages, Faculté des sciences de Marseille; Eugène Lequintrec, lycée de Toulouse; A. Marmion, lycée de Moulins.

225. — *On donne dans un triangle* ABC : *la hauteur* AH = 4865^m, *la hauteur* BK = 2943^m, *l'angle* C = 55°40′27″.

On demande de calculer les angles A *et* B, *les côtés* a, b, c *et la surface.*

(Elèves externes.)

Données.	Formules.	Résultats.
AH = 4865, BK = 2943, C = 55°40′27″.	$\frac{B+A}{2} = 90 - \frac{C}{2}$, $\quad \operatorname{tg}\frac{B-A}{2} = \frac{AH-BK}{AH+BK}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}$, $a = \frac{BK}{\sin C}$, $\quad b = \frac{AH}{\sin C}$, $\quad c = \frac{BK}{\sin A}$, $S = \frac{1}{2}\cdot\frac{AH \times BK}{\sin C}$.	A = 37°10′13″,5, B = 87° 9′19″,5, a = 3563^m,62, b = 5890^m,94, c = 4871^m, S = 8668520^{mq}.

Calculs auxiliaires.

$$\frac{C}{2} = 27°50'13'',5$$

$$\frac{B+A}{2} = 62°9'46'',5$$

$$AH - BK = 1922$$

$$AH + BK = 7808$$

Calcul de $\log \operatorname{cotg}\frac{C}{2}$.

27°50′20″	0,2772773
6″	306
5	25,5

$$\log \operatorname{cotg}\frac{C}{2} = 0,2773104$$

Calcul de log sin C.

55°40′20″	$\bar{1}$,9168880
7	100,8

$$\log \sin C = \bar{1},9168981$$

Calcul de log sin A.

37°10′10″	$\bar{1}$,7811622
3	83,4
5	13,9

$$\log \sin A = \bar{1},7811719$$

Calculs définitifs.

Calcul de A et B.

$$\log (AH - BK) = 3,2837534$$
$$-\log (AH + BK) = \bar{4},1074602$$
$$\log \operatorname{cotg}\frac{C}{2} = 0,2773104$$
$$\log \operatorname{tg}\frac{B-A}{2} = \bar{1},6685240$$

076	24°59′30″
164	3″

$$\frac{B-A}{2} = 24°59'33''$$

$$\frac{B+A}{2} = 62°9'46'',5$$

A = 37°10′13″5 B = 87°9′19″,5

Calcul de a.

$$\log BK = 3,4687903$$
$$\log \sin C = \bar{1},9168981$$
$$\log a = 3,5518922$$

890	35636
32	2

a = 3563^m,62

Calcul de b.

$$\log AH = 3,6870828$$
$$\log \sin C = \bar{1},9168981$$
$$\log b = 3,7701847$$

17	58909
30	4

b = 5890^m,94

Calculs définitifs *(suite)*.

CALCUL DE c.

$$\log BK = 3,4687903$$
$$\log \sin A = \bar{1},7811719$$
$$\log c = 3,6876184 \qquad 4871$$
$$c = 4871^{m}$$

CALCUL DE S.

$$\log AH = 3,6870828$$
$$\log BK = 3,4687903$$
$$-\log \sin C = 0,0831019$$
$$-\log 2 = \bar{1},6989700$$
$$\log S = 6,9376450$$
$$\frac{40}{10} \qquad 86685 \qquad 2$$
$$S = 8668520^{mq}$$

Paul BEGOU, lycée de Marseille; DELACOURCELLE, conducteur des Ponts et Chaussées, à Marchenoir (Loir-et-Cher).

---

226. — *Un point* b *mobile s'élève verticalement en* B *avec une vitesse initiale nulle et une accélération constante* γ. *D'un autre point* A, *situé dans le même plan horizontal que* B, *on lance un projectile assimilable à un point matériel pesant, avec une vitesse initiale donnée* v_0. *On demande quelle direction on doit donner à cette vitesse initiale pour que le projectile atteigne le point* b.

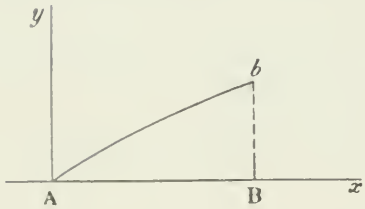
(Élèves externes.)

Soit α l'angle que fait la vitesse initiale avec l'axe des x, le point A décrit une parabole, et les coordonnées d'un point quelconque de cette trajectoire sont

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0 t \cos \alpha, \\ y &= v_0 t \sin \alpha - g \frac{t^2}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Soit a l'abscisse du point B, supposée positive; si t désigne l'époque à laquelle a lieu la rencontre, les coordonnées du point b pourront s'écrire sous la forme (1) ou encore sous la forme suivante :

$$\left.\begin{aligned} x &= a \\ y &= \frac{1}{2} \gamma t^2. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$



Tout revient donc à écrire que ces coordonnées sont les mêmes; on a donc

$$a = v_0 t \cos \alpha.$$
$$\frac{1}{2} \gamma t^2 = v_0 t \sin \alpha - g \frac{t^2}{2}.$$

La première équation donne

$$t = \frac{a}{v_0 \cos \alpha}, \qquad (3)$$

et la seconde, après avoir divisé par t, et remplacé t par cette valeur,

$$\sin 2\alpha = \frac{a(g + \gamma)}{v_0^2}. \qquad (4)$$

Pour que le problème soit possible, il faut que

$$v_0^2 > a(g + \gamma);$$

et si cette condition est remplie, l'équation (4) donne pour 2α deux angles supplémentaires β et $\pi - \beta$.

On a donc pour α les deux valeurs $\frac{\beta}{2}$ et $\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}$, et l'équation (3) montre qu'à la plus petite valeur de α correspond la plus petite valeur de t.

On peut rechercher si le projectile passe au point b en montant ou en descendant sur sa trajectoire.

Ce mobile passe au sommet de la parabole à l'époque t déterminée par

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt = 0,$$

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Il passera donc au point b en montant si

$$\frac{v_0 \sin \alpha}{g} > \frac{a}{v_0 \cos \alpha},$$

ou

$$\sin 2\alpha > \frac{2ag}{v_0^2}; \tag{5}$$

en descendant, si

$$\sin 2\alpha < \frac{2ag}{v_0^2}; \tag{6}$$

enfin le mobile sera au sommet de sa courbe si l'on a

$$\sin 2\alpha = \frac{2ag}{v_0^2}. \tag{7}$$

Or, en remplaçant $\sin 2\alpha$ par sa valeur tirée de l'équation (5), l'inégalité (6) devient

$$g + \gamma < 2g \qquad \text{ou} \qquad \gamma < g.$$

Donc les deux rencontres auront lieu en *montant* si $\gamma < g$; en *descendant* si $\gamma > g$ et au sommet de chaque parabole, si $\gamma = g$.

A. Bailly, lycée de Dijon.

Autres solutions par MM. : A. Audoin; Paul Begou, lycée de Marseille; Delacourcelle, conducteur des Ponts et Chaussées, à Marchenoir (Loir-et-Cher); Félix Dutech, lycée de Toulouse; A. Duhameaux, lycée d'Amiens; Joseph Foti, école navale de Gênes; Eugène Lequintrec, lycée de Toulouse; Villequey, répétiteur au collège de Semur.

GEOMÉTRIE ANALYTIQUE

205. — *On donne un point* A *de l'axe et un point* A′ *de la tangente au sommet d'une parabole de paramètre* 2p. *On demande : 1° le lieu du foyer; 2° l'enveloppe de la directrice.*

1° Prenons pour origine le point A, pour axe des x AA′ et des axes rectangulaires. Désignons par a l'abscisse du point A′. La parabole étant rapportée à son axe et à sa tangente au sommet a pour équation

$$Y^2 = 2pX.$$

Soit φ l'angle de Ox avec l'axe de la parabole. Les formules de transformation pour passer du système OX, OY au système Ox, Oy sont

$$X = (x - a) \cos \varphi - y \sin \varphi$$

$$Y = x \sin \varphi + y \cos \varphi.$$

Les coordonnées du foyer sont $X = \frac{p}{2}$, $Y = 0$. Soient x et y les coordonnées du foyer dans le système Ox, Oy, nous aurons

$$(x - a)\cos\varphi - y\sin\varphi = \frac{p}{2},$$

$$x\sin\varphi + y\cos\varphi = 0.$$

On aura le lieu du foyer en éliminant φ entre ces deux équations. On trouve ainsi

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = \frac{p^2}{4}(x^2 + y^2),$$

équation d'un limaçon de Pascal dont le cercle générateur est le cercle décrit sur AA′ comme diamètre, la longueur dont on prolonge toutes les cordes étant $\frac{p}{2}$.

2° L'équation de la directrice est $X = -\frac{p}{2}$

ou $$(x - a)\cos\varphi - y\sin\varphi + \frac{p}{2} = 0.$$

La dérivée de cette équation par rapport à φ est

$$(x - a)\sin\varphi + y\cos\varphi = 0.$$

Éliminant φ entre ces deux équations, on a l'équation du lieu qui se décompose en

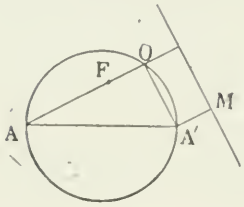
$$(x - a)^2 + y^2 = 0,$$

$$(x - a)^2 + y^2 = \frac{p^2}{4}.$$

La première équation représente les droites isotropes issues de A′, la seconde le cercle de centre A′ et de rayon $\frac{p}{2}$.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

1° Soit F un point du lieu et O le sommet correspondant. L'axe est AO et la tangente au sommet A′O ; donc l'angle AOA′ est droit et le point O est sur la circonférence décrite sur AA′ comme diamètre. On a d'ailleurs



$$OF = \frac{p}{2} = \text{const.}$$

ce qui montre clairement que le lieu de F est un limaçon de Pascal.

2° Projetons le point A′ en M sur la directrice. On a

$$A'M = \frac{p}{2}.$$

L'enveloppe de la directrice est donc la circonférence de centre A′ et de rayon $\frac{p}{2}$.

B. Denain (Rouen).

Ont résolu la question 205 : MM. Audouin, lycée Louis-le-Grand; Audibert, Marseille; Bailly, Dijon; E. Barisien; Brélivet, Nantes; H. Chéronnet, lycée Condorcet; L. Espinat, à Espinchal; Foucart, lycée Michelet; H. Lambert, lycée d'Alger; Lussaud, lycée Saint-Louis; A. Morel, au Creusot; J. Marchal, 89e de ligne, à Courbevoie; J. Singuey, lycée de Tours; Démétre Simianescu, sous-lieutenant de l'armée roumaine; J. Vandier, 114e de ligne, Saint-Maixent; Ed. Nossuh, soldat au 26e de ligne, à Nancy.

217. — *Trouver le lieu du second foyer d'une hyperbole équilatère dont on donne un point et un foyer.*

Soit A le point donné; prenons pour origine des coordonnées le foyer donné O, l'axe des x étant la droite OA et l'axe de y perpendiculaire à OA; posons $OA = a$. Soient M le second foyer et C le centre d'une des hyperboles équilatères considérées; comme $OM = 2OC$, il suffit de chercher le lieu du centre, on en déduira immédiatement le lieu du foyer M. L'équation de l'une des hyperboles équilatères étant

$$x^2 + y^2 = 2(x \cos \varphi + y \sin \varphi + h)^2,$$

en écrivant que cette courbe passe par A, on a

$$a^2 = 2(a \cos \varphi + h)^2$$

ou

$$a \cos \varphi + h = \varepsilon \frac{a\sqrt{2}}{2}, \qquad (\varepsilon = \pm 1) \qquad (1)$$

Les coordonnées du centre sont définies par les deux équations

$$x = 2(x \cos \varphi + y \sin \varphi + h) \cos \varphi, \qquad (2)$$

$$y = 2(x \cos \varphi + y \sin \varphi + h) \sin \varphi. \qquad (3)$$

Ces deux équations donnent

$$\frac{\cos \varphi}{x} = \frac{\sin \varphi}{y} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

en remplaçant dans la relation (1) $\cos \varphi$ par $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ on a

$$h = \varepsilon \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{ax}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

et en portant dans l'équation (2) les expressions de $\cos \varphi$, $\sin \varphi$ et h, on a

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2\left(\sqrt{x^2 + y^2} + \varepsilon \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{ax}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

ou, en simplifiant,

$$x^2 + y^2 + \varepsilon a\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2} - 2ax = 0.$$

ce qui donne pour le lieu des centres

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 2a^2(x^2 + y^2).$$

Le lieu des foyers a donc pour équation

$$(x^2 + y^2 - 4ax)^2 = 8a^2(x^2 + y^2);$$

c'est un limaçon de Pascal, car si l'on construit le cercle ayant pour équation

$$x^2 + y^2 - 4ax = 0,$$

en appelant P le point de rencontre de OM avec le cercle, l'équation précédente exprime que

$$\overline{OM}^2 . \overline{PM}^2 = 8a^2 . \overline{OM}^2,$$

et par suite

$$PM = 2a\sqrt{2}.$$

On peut remarquer que les tangentes au point double sont rectangulaires.

E.-N. Barisien.

Autres solutions : MM. Braillion, Amiens; Duhameaux, Amiens; Dutech, Toulouse; Gauroy, Condorcet.

Seconde solution. — L'équation de l'hyperbole équilatère peut être écrite ainsi :

$$x^2 + y^2 + 2\lambda^2 + 4\lambda(x \cos\varphi + y \sin\varphi + h) - 2(x \cos\varphi + y \sin\varphi + h + \lambda)^2 = 0,$$

λ désignant un paramètre arbitraire ; sous cette forme on voit que l'hyperbole est bitangente au cercle C

$$x^2 + y^2 + 2\lambda^2 + 4\lambda(x \cos\varphi + y \sin\varphi + h) = 0,$$

la corde des contacts étant parallèle à la directrice correspondant à l'origine. On aura le second foyer en déterminant λ de façon que le cercle C ait un rayon nul, ce qui donne la condition

$$\lambda^2 - 2\lambda h = 0,$$

d'où $\lambda = 0$, et $\lambda = 2h$. La première solution correspond à l'origine ; la seconde donne le cercle dont le centre a pour coordonnées

$$x = -4h \cos\varphi,$$
$$y = -4h \sin\varphi.$$

Les coordonnées polaires d'un point du lieu sont donc $-4h$ et φ, et par suite l'équation du lieu s'obtient en remplaçant h par $-\frac{\rho}{4}$ dans l'équation (1), ce qui donne

$$\left(a \cos\varphi - \frac{\rho}{4}\right) = \pm a \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ou

$$\rho = 4a \cos\varphi \mp 2a\sqrt{2}$$

Eugène Lequintrec (Toulouse).

Solution géométrique. — La directrice est à une distance du point A égale à $\frac{a}{\sqrt{2}}$; elle enveloppe un cercle ayant pour centre le point A ; la projection G du foyer sur la directrice décrit donc un limaçon de Pascal et comme $\overline{OM} = 4\overline{OG}$, le lieu du point M est aussi un limaçon. Le premier limaçon ayant pour équation

$$\rho = a \cos\varphi + \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

le second a pour équation

$$\rho = 4a \cos\varphi + 2a\sqrt{2}.$$

Eugène Lequintrec (Toulouse).

Ont envoyé des solutions géométriques analogues : MM. Brélivet, Nantes ; H. Chéronnet, Condorcet ; Dutech, Toulouse.

MM. P. Fages (Marseille), Marmion (Moulins), Bailly (Dijon) ont traité la question par les coordonnées polaires en remarquant que

$$AO - AM = \pm \frac{OM}{\sqrt{2}}.$$

MM. J. Hais (à Étampes) et Audibert (Marseille) ont résolu la question en se servant des coordonnées tangentielles.

Enfin, M. Meynier a traité la question plus générale obtenue en remplaçant la condition que l'hyperbole ait un foyer donné par la condition qu'elle soit bitangente à un cercle donné. C'est un cas particulier de l'une des questions portant le n° 215.

---

230. — *En un point* M *d'une ellipse, on mène la normale qui rencontre le grand axe en* N *et le petit axe en* N'. *Si du point* M *on mène les tangentes aux deux circonférences décrites sur* ON *et sur* ON' *comme diamètres, la longueur des tangentes à la première circonférence est égale au demi-petit axe, la longueur des tangentes à la seconde est égale au demi-grand axe.*

SOLUTION ANALYTIQUE

L'ellipse donnée étant rapportée à ses axes de symétrie, la normale au point M (α, β) a pour équation

$$\frac{a^2x}{\alpha} - \frac{b^2y}{\beta} = c^2;$$

donc l'abscisse du point de rencontre N de la normale avec le grand axe a pour expression

$$x = \frac{c^2\alpha}{a^2};$$

le cercle décrit sur ON a donc pour équation

$$x^2 + y^2 - \frac{c^2\alpha}{a^2}x = 0.$$

Par suite la puissance du point M par rapport à ce cercle a pour expression,

$$\alpha^2 + \beta^2 - \frac{c^2\alpha^2}{a^2} = b^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}\right) = b^2.$$

Pareillement, la normale en M rencontre le petit axe au point N′ ayant pour ordonnée $-\frac{c^2\beta}{b^2}$, et le cercle décrit sur ON′ pour diamètre a pour équation,

$$x^2 + y^2 + \frac{c^2\beta}{b^2}y = 0.$$

La puissance du point M par rapport à ce cercle a donc pour expression

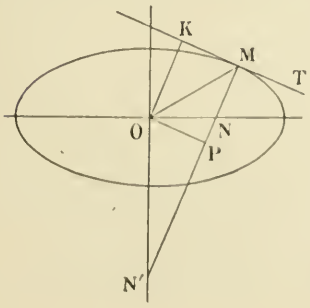
$$\alpha^2 + \beta^2 + \frac{c^2\beta^2}{b^2} = a^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}\right) = a^2.$$

Solutions exactes par MM. Bailly ; Bloch, lycée de Dijon ; Braillion, lycée d'Amiens ; Delacourcelle, à Marchenoir ; Duhameaux, lycée d'Amiens ; L. Espinat, instituteur à Espinchal (Puy-de-Dôme) ; É. Foucart, lycée Michelet ; G. Tzitzéica, à Bucarest ; H. Lebesgue, lycée Saint-Louis ; Meynier, Nancy ; Pellissier, lycée Ampère, à Lyon ; G.-A. Pouilliart, lycée de Clermont-Ferrand ; L. Randon, Villequey, collège de Semur.

M. Marchal, soldat au 89e, à Courbevoie, généralise ainsi le théorème. En un point d'une ellipse ou d'une hyperbole on mène la normale qui rencontre l'un des axes en N. Sur ON comme diamètre, O étant le centre de la conique, on décrit un cercle. Le point M et le sommet de la courbe situé sur l'autre axe, ont même puissance par rapport à ce cercle.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Les circonférences C, C′ décrites sur ON et ON′ comme diamètres passent par le point P pied de la perpendiculaire abaissée du centre O de l'ellipse sur la normale. Soit OK la distance de O à la tangente MT en M. Si l'on désigne par b' le demi-diamètre conjugué de OM, on sait que



$$OK = \frac{ab}{b'},$$

$2a$ et $2b$ étant les deux axes de l'ellipse.

D'autre part, $$MN = \frac{bb'}{a};$$

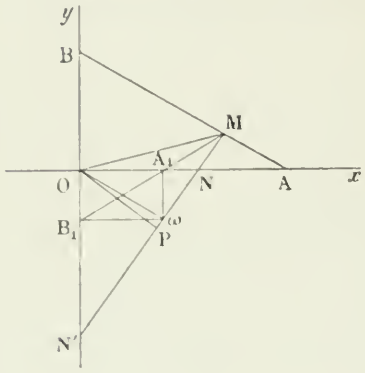
donc $$MN.MP = \frac{bb'}{b} \times \frac{ab}{b'} = b^2.$$

De même $$MN' = \frac{ab'}{q},$$

donc $$MN'.MP = \frac{ab'}{b} \times \frac{ab}{b'} = a^2.$$

L. Bassal, lycée de Toulouse; H. Brélivet, lycée de Nantes.

Deuxième solution géométrique. — On peut mener par le point M deux droites MAB et MA_1B_1 telles que



$$MA = MA_1 = b, \qquad MB = MB_1 = a.$$

La normale en M à l'ellipse passe par le point ω de rencontre des perpendiculaires aux axes menées par A_1 et B_1. Les droites AB et A_1B_1 sont également inclinées sur les axes, d'où il résulte que Oω est parallèle à AB; il en résulte que le faisceau $(M.ONA_1A)$ est harmonique. Le cercle décrit sur ON comme diamètre et le cercle ayant pour centre M, et pour rayon MA, sont donc orthogonaux et par suite la tangente menée de M au premier est égale à MA, c'est-à-dire à b. Même démonstration pour le point N'.

(L. Randon.)

Troisième démonstration géométrique (figure précédente). — Soit P le pied de la perpendiculaire abaissée du centre O sur la normale MN; le cercle circonscrit au rectangle $OA_1B_1\omega$ passe par P; il en résulte que l'angle $B_1A_1P = ONP$, ces angles ayant mêmes mesures, et par suite le cercle circonscrit au triangle PNA_1 est tangent en A_1 à MA_1, donc

$$MN.MP = \overline{MA_1}^2 = b^2,$$

ce qui démontre la proposition relative au point N. Même démonstration pour l'autre point.

E. Gueden (lycée Saint-Louis).

Autre démonstration. — On sait que la perpendiculaire menée au milieu d'une corde d'une ellipse rencontre un axe au point milieu du segment déterminé sur le même axe par les normales menées aux extrémités de la corde considérée. Il en résulte que le milieu C de ON est à égale distance du point M et du sommet B; par conséquent

$$\overline{MC}^2 - \overline{OC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{OC}^2 = b^2,$$

ce qui démontre la proposition.

L. Bassal (Toulouse).

M. G. Tzitzéica, à Bucarest, et M. E. Lequintrec, à Toulouse, ont également envoyé des solutions géométriques.

PHYSIQUE ET CHIMIE

88. — *On chauffe* $12^{kg}400$ *de phosphore avec un excès d'hydrate de baryte dissous dans l'eau. On admet qu'il ne se produit ni hydrogène libre, ni acide phosphorique et que le gaz dégagé se compose de* $\frac{9}{10}$ *de phosphure d'hydrogène gazeux et de* $\frac{1}{10}$ *de vapeurs d'hydrogène phosphoré liquide. Après dissolution du phosphore, le*

liquide est traité par un courant d'acide carbonique en excès et filtré. A cette dissolution on ajoute de l'acide sulfurique dilué tant qu'il se forme un précipité; on filtre de nouveau, on lave et on sèche le précipité. Dans la dernière liqueur filtrée on fait passer un courant de chlore en excès, puis on évapore et on calcine en s'arrêtant avant la volatilisation du produit solide.

On demande :

1° Le poids du précipité donné par l'acide sulfurique;

2° La nature et le poids du produit contenu dans le liquide séparé de ce précipité;

3° Le poids de chlore utilisé par cette dissolution;

4° La nature et le poids du produit obtenu après évaporation et calcination.

On donne l'équivalent du baryum : Ba = 68,5.

(Concours général de 1891.)

Les formules de la première réaction sont les suivantes :

$$8Ph + 3BaO + 9H^2O = 3(Ph^2O^4H^4Ba) + 2PhH^3,$$

$$6Ph + 2BaO + 6H^2O = 2(Ph^2O^4H^4Ba) + Ph^2H^4.$$

Ces formules étant établies en atomes, PhH^3 et Ph^2H^4 correspondent au même volume de vapeur. Comme il se produit neuf fois plus de PhH^3 que de PhH^2, il faudra prendre neuf fois les quantités de corps établies dans la première réaction et deux fois les quantités nécessaires à la seconde.

Il faudra donc prendre 84Ph, et on obtiendra

$$31\,(Ph^2O^4H^4Ba).$$

Le courant d'acide carbonique précipitera l'excès de baryte et il ne restera dans la liqueur que de l'hypophosphite de baryte, que l'acide sulfurique décompose en acide hypophosphoreux et sulfate de baryte insoluble. Le précipité de sulfate de baryte SO^4Ba a un poids que l'on déterminera facilement en remarquant qu'il contient toute la baryte de l'hypophosphite.

84 atomes de Ph donnent donc 31 atomes SO^4Ba ;
84×31^{gr} de Ph — 31×233^{gr} SO^4Ba.

Donc les $12^{gr},400$ de Ph donneront $\dfrac{31 \times 233 \times 12,400^{gr}}{84 \times 31}$ $SO^4Ba = 34^{gr},4$ SO^4Ba.

Le courant de chlore en excès agissant comme oxydant, transforme l'acide hypophosphoreux en acide phosphorique, et la calcination fait passer ce dernier à l'état d'acide métaphosphorique, PhO^3H.

Pour trouver son poids, remarquons qu'il contient tout le phosphore de l'hypophosphite de baryte.

Donc en employant 84 atomes de Ph, on obtient 62 molécules de PhO^3H ;

84×31^{gr} de Ph donnent 62×80^{gr} de PhO^3H,

et par suite les $12^{gr},4$ de Ph donneront un poids d'acide métaphosphorique égal à

$$\frac{62 \times 80 \times 12,4}{84 \times 31} \text{ grammes} = 23^{gr}6.$$

C. Duperray, Élève à l'École normale supérieure.

---

159. — *On a proposé, pour comparer les valeurs de l'accélération de la pesanteur dans les différents lieux du globe, l'emploi d'un baromètre à siphon. Ce siphon serait à branches bien cylindriques, et la petite branche, renfermant un gaz sec, aurait été fermée à la lampe. Les variations de g se déduiraient des variations du niveau du mercure dans la petite branche. On demande d'établir la formule :*

1° Dans le cas où l'instrument serait toujours ramené à une température constante;

2° Dans le cas où l'observation serait faite à une température quelconque;

3° Dans le cas où, au lieu d'un gaz, on aurait enfermé dans la petite branche une vapeur en contact avec un excès du liquide générateur.

(Concours général de 1892.)

1° Désignons par h la distance du sommet de la petite branche au niveau du mercure dans cette branche et par H la différence de niveau dans les deux branches. Soit δ la densité (*masse* de l'unité de volume) du mercure à la température constante à laquelle on opère.

Appliquons la loi de Mariotte au volume de gaz compris dans la petite branche : soit P la pression de ce gaz : $Ph = \text{Const.}$,

D'ailleurs cette pression $P = H\delta g$, g étant l'accélération de la pesanteur au point considéré : on a donc $Hh\delta g = C^{te}$. (1)

Cela étant, transportons l'appareil dans un autre lieu où l'accélération de la pesanteur sera g' : on aura $H'h'\delta g' = C^{te}$, (2)

H' et h' étant les nouvelles valeurs de H et h, D'ailleurs on a

$$2(h' - h) = H' - H, \quad \text{d'où} \quad H' = H + 2(h' - h)$$

(en supposant les deux branches de même diamètre).

Des équations (1) et (2) on tire $H'h'g' = Hhg$,

$$g' = g\,\frac{Hh}{H'h'} = gH\,\frac{h}{h'[H + 2(h' - h)]}.$$

On voit donc que si on a mesuré en un point l'intensité g de la pesanteur par une autre méthode, et les quantités H et h correspondantes, il suffira pour avoir cette intensité en un point quelconque, de mesurer h'.

La sensibilité de l'instrument sera d'autant plus grande que pour une valeur donnée de h' le rapport $\frac{g'}{g}$ sera plus voisin de l'unité.

2° Supposons que l'observation se fasse à une température quelconque t : appliquons la loi de Gay-Lussac au gaz de la petite branche : soit P la pression :

$$\frac{Ph}{1 + \alpha t} = C^{te}.$$

D'ailleurs cette pression $P = H\,\frac{\delta}{1 + \mu t}\,g$,

μ étant le coefficient de dilatation du mercure.

On a donc
$$\frac{Hh\delta g}{(1 + \alpha t)(1 + \mu t)} = C^{te}.$$

Supposons maintenant qu'on transporte l'instrument dans un autre lieu où l'intensité de la pesanteur sera g' ; soit H', h' les quantités correspondantes à H et h, t' la température.

On aura
$$\frac{H'h'\delta g}{(1 + \alpha t)(1 + \mu t)} = C^{te},$$

$$\frac{[H + 2(h' - h)]h'\delta g'}{(1 + \alpha t')(1 + \mu t')} = C^{te}.$$

On a donc
$$\frac{Hh\delta g}{(1 + \alpha t)(1 + \mu t)} = \frac{[H + 2(h' - h)]h'\delta g'}{(1 + \alpha t')(1 + \mu t')},$$

d'où
$$g' = g\,\frac{Hh}{[H + 2(h' - h)]h'} \cdot \frac{(1 + \alpha t')(1 + \mu t')}{(1 + \alpha t)(1 + \mu t)}.$$

3° Supposons qu'on ait enfermé dans la petite branche une vapeur en contact avec un excès du liquide générateur. Soit F_t la tension maximum de cette vapeur à la température de l'expérience. Écrivons que cette pression fait équilibre à la colonne de mercure

$$F_t = H \frac{\delta}{1 + \mu t} g.$$

Si on fait une observation dans un autre lieu à la même température, on aura

$$F_t = H' \frac{\delta}{1 + \mu t} g'.$$

En retranchant ces deux équations, membre à membre, on obtient

$$Hg - H'g' = 0, \qquad g' = g \frac{H}{H'},$$

$$g' = g \frac{H}{H + 2(h' - h)}.$$

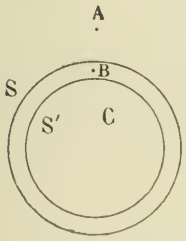
C. Duperray, élève à l'école normale supérieure.
(1er prix au concours général.)

---

175. — *Quelle est, en colonne d'eau, la pression à l'intérieur d'une bulle de savon de 4 centimètres de diamètre, la constante capillaire (ou tension superficielle) du liquide qui constitue la bulle étant 75 en unités Centimètre-Gramme-Seconde?*

(École normale, concours de 1892.)

La bulle de savon est formée d'une masse d'air entourée d'une couche liquide sphérique qui présente deux surfaces libres S, S′ l'une extérieure, l'autre intérieure. Si nous passons d'un point extérieur A à un point B dans la couche liquide, nous traversons la surface S. Donc, d'après la formule de Laplace, la pression augmente de $\frac{2F}{R}$, F étant la tension superficielle et R le rayon de la surface sphérique S. Si l'on passe de B en C, on traverse la surface S′ et la pression augmente encore de $\frac{2F}{R}$ (car les rayons des surfaces sphériques S, S′ sont sensiblement égaux). La pression à l'intérieur de la bulle de savon surpasse donc la pression extérieure de $\frac{4F}{R}$, c'est-à-dire $\frac{4 \times 75}{2}$.



Cette pression est évaluée en dynes par unité de surface, c'est-à-dire par centimètre carré. Pour l'évaluer en gramme par centimètre carré, il faut la multiplier par $\frac{1}{980}$ qui est la valeur d'une dyne en grammes. On obtient donc

$$\frac{4 \times 75}{2} \times \frac{1}{980} = 0^{gr},15.$$

Elle équivaut donc à une colonne d'eau de $0^{cm},15$.

C. Duperray, élève à l'école normale supérieure.

M. Meynier, école Saint-Sigisbert, à Nancy, avait envoyé une solution exacte de la question 208.

CONCOURS DE 1893 *(suite)*.

CONCOURS GÉNÉRAUX DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Mathématiques. (Paris et départements).

277. — On donne une conique S et un triangle ABC conjugué par rapport à cette conique.

1° Démontrer que, par un point quelconque P de S, passent quatre coniques circonscrites au triangle ABC et touchant S chacune en un point autre que P.

2° Les points où ces quatre coniques touchent S sont situés sur une conique S_1, circonscrite au triangle ABC.

3° Quand le point P décrit la conique S, la conique S_1 enveloppe une courbe Γ du quatrième ordre.

4° D'un point M de la courbe Γ, on peut mener à cette courbe quatre tangentes autres que celle qui touche la courbe au point M.

Démontrer que les points où ces quatre tangentes touchent Γ sont sur une même droite D, et trouver l'enveloppe de la droite D quand le point M décrit la courbe Γ.

(16 mai, de 8 h. 1/2 à 5 h.)

Chimie (Paris).

I. — Hydracides étudiés dans le cours.

II. — **278.** On dissout 24^{gr} de brôme dans une solution concentrée contenant $16^{gr},8$ d'hydrate de potasse;

Le liquide porté à l'ébullition et évaporé à sec donne un résidu que l'on pèse.

Ce résidu, calciné à une température élevée, dégage un gaz dont on mesure le volume, et laisse un nouveau résidu dont on détermine le poids.

On mélange le gaz recueilli avec celui que l'on prépare en chauffant $23^{gr},8$ d'acide formique pur avec un excès d'acide sulfurique et on fait passer une étincelle dans le mélange gazeux. Le résidu gazeux est agité avec une dissolution de potasse et le nouveau résidu gazeux mesuré sec est mélangé avec son volume de chlore et exposé au soleil. On mesure ensuite le volume du gaz et on l'agite avec 10^{cc} d'eau.

On mesure le volume gazeux final.

On demande :

1° Le poids et la composition de chacun des résidus solides;

2° La nature et le volume à 0° et sous 760^{mm} des diverses masses gazeuses obtenues successivement.

Le coefficient de solubilité de l'acide carbonique dans l'eau est 1. K = 39, Br = 80.

(19 mai, de 10 h. à 4 h. 1/2).

Physique (Paris).

I. — Détermination de la densité des vapeurs.

II. — **279.** Deux lentilles convergentes, de diamètres 2L et 2L′, sont placées à une distance l'une de l'autre D très grande par rapport à leurs distances focales f et f', les axes en coïncidence.

A une distance d de la première et concentriquement à l'axe, on place un objet lumineux ayant la forme d'un disque circulaire de rayon r; et de la même manière, à une distance d' derrière la seconde, un petit miroir sphérique de diamètre $2m$ et de distance focale φ, de telle sorte que les rayons émanés de l'objet, ramenés au point de départ, donnent de cet objet, ou tout au moins d'une portion de sa surface, une image réelle.

On demande :

1° Comment il faudra disposer le d et de d', de m et de φ pour utiliser au mieux pour la formation de l'image, les rayons émanés de l'objet;

2° Quelle sera la grandeur de l'image de retour;

3° Son éclat intrinsèque;

4° Enfin quelle valeur il faudra donner à L′ pour avoir l'image entière du disque lumineux.

(25 mai, de 10 h. à 4 h. 1/2).

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX. — 14434-6-93.

3e Année. N° 11. Août 1893.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

SUR CERTAINES COURBES DU QUATRIÈME ORDRE

Par M. **V. Jamet.**

On sait que la projection, conique ou cylindrique, de la courbe commune à deux surfaces du second degré est, en général, une courbe du quatrième ordre ayant deux points doubles (ou isolés); chacun d'eux est la projection commune à deux des points d'intersection des deux coniques suivant lesquelles les deux quadriques sont coupées par un plan passant par le point de vue et par la droite commune aux deux plans polaires du point de vue; dans le cas de la projection cylindrique ces deux plans polaires sont remplacés par les plans diamétraux conjugués de la direction des projetantes. Je me propose de démontrer la réciproque de cette proposition, savoir : « *Toute courbe du quatrième ordre, ayant deux points doubles, est, par rapport à un point de l'espace choisi à volonté, à distance finie ou infinie, la projection conique, ou cylindrique, de l'intersection de deux quadriques, que l'on peut faire varier d'après une loi déterminée.* »

Cherchons d'abord l'équation d'une telle courbe plane. A cet effet nous la rapportons à un triangle dont deux sommets sont les points doubles donnés: soit $Z = 0$ l'équation, en coordonnées homogènes, de la droite qui joint ces deux points, et soient $X = 0$, $Y = 0$, les équations des deux autres côtés. L'équation cherchée a pour premier membre un polynome du quatrième degré, homogène, en X, Y, Z, et tel que si l'on y fait $X = 0$, ou $Y = 0$, on trouve une équation dont le premier membre est divisible par Z^2. Donc l'équation cherchée est de la forme

$$Z^2U + XY.V = 0,$$

U, V, désignant deux polynomes homogènes, du second degré. Mais dans l'hypothèse où $Z = 0$, cette équation doit se réduire à

$$X^2Y^2 = 0.$$

Donc
$$V \equiv \alpha XY + \beta ZX + \gamma YZ + \delta Z^2,$$

et l'équation cherchée est celle-ci:

$$Z^2U + XY(\alpha XY + \beta ZX + \gamma YZ + \delta Z^2) = 0.$$

Mais on peut la simplifier, en dirigeant convenablement les deux côtés X, Y du triangle de référence. En effet, posons :

$$X = X' - \frac{\gamma}{2\alpha}Z, \qquad Y = Y' - \frac{\beta}{2\alpha}Z;$$

le polynome U ne cessera pas d'être quadratique en X', Y', Z, et d'autre part, nous trouverons

$$\alpha XY + \beta ZX + \gamma YZ + \delta Z^2 = \alpha\left[\left(X + \frac{\gamma}{\alpha}Z\right)\left(Y + \frac{\beta}{\alpha}Z\right) + \left(\frac{\delta}{\alpha} - \frac{\beta\gamma}{\alpha^2}\right)Z^2\right]$$

$$= \alpha\left[\left(X' + \frac{\gamma}{2\alpha}Z\right)\left(Y' + \frac{\beta}{2\alpha}Z\right) + \left(\frac{\delta}{\alpha} - \frac{\beta\gamma}{\alpha^2}\right)Z^2\right],$$

et l'équation de la courbe deviendra

$$UZ^2 + \alpha\left(X'^2 - \frac{\gamma^2}{4\alpha^2}Z^2\right)\left(Y'^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha^2}Z^2\right) + \left(\delta - \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)Z^2\left(X' - \frac{\gamma}{2\alpha}Z\right)\left(Y' - \frac{\beta}{2\alpha}Z\right) = 0,$$

et, en désignant par P un nouveau polynome quadratique en X', Y', Z,

$$P.Z^2 + \alpha X'^2 Y'^2 = 0.$$

Finalement, l'équation cherchée pourra être mise sous la forme

$$X^2Y^2 = QZ^2. \qquad (1)$$

Q désignant le premier membre de l'équation d'une conique. Cela posé, dans les polynomes, X, Y, Z, Q, remplaçons x par $x_0z - z_0x$, y par $y_0z - z_0y$, z par $z - z_0$, et dans l'équation transformée, regardons x_0, y_0, z_0 comme les coordonnées cartésiennes d'un point fixe, x, y, z comme les coordonnées d'un point mobile sur une surface. L'équation transformée représentera la surface conique ayant pour sommet le point x_0, y_0, z_0, et pour base la courbe donnée. Désignant par X_s, Y_s, Z_s, Q_s, ce que deviennent les polynomes ci-dessus après la transformation, par U un polynome linéaire quelconque en x, y, z, on voit que l'équation de la surface conique ci-dessus peut être considérée comme résultant de l'élimination de U entre les deux équations

$$X_sY_s = Z_sU, \qquad Q_s = U^2,$$

lesquelles représentent deux quadriques, dont l'intersection est située sur notre surface conique.

Pour traiter le problème concernant la projection cylindrique (projection orthogonale ou perspective cavalière), il suffirait de regarder l'équation (1) sans autre transformation, comme représentant un cylindre, dont les génératrices seraient parallèles à l'axe des z. Ce cylindre passera par la ligne commune aux surfaces définies par les équations

$$XY = ZU, \qquad Q = U^2.$$

PROPRIÉTÉ DES CUBIQUES

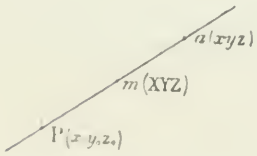
Étant donnés une cubique et un point P, *on mène de ce point les six tangentes à la cubique, qui la coupent en six points* a, b, c, d, e, f *autres que les points de contact. On sait que ces derniers sont sur la conique* (C) *polaire du point* P : *les six points* a, b, c, d, e, f *sont sur une autre conique* (C') *bitangente à* (C), *la corde des contacts étant l'axe harmonique du point* P.

En effet, soit $f(x, y, z) = 0$ l'équation de la cubique. (x_0, y_0, z_0) seront les coordonnées du point P, (X, Y, Z) celles d'un point de contact, et (x, y, z) celles d'un point tel que a; on a

$$\frac{X}{x_0 + \mu x} = \frac{Y}{y_0 + \mu y} = \frac{Z}{z_0 + \mu z}.$$

Formons l'équation aux μ des points de rencontre avec la cubique

$$f(x_0 + \mu x, y_0 + \mu y, z_0 + \mu z) = f(x_0, y_0, z_0) + \mu D + \frac{\mu^2}{1.2}C + \mu^3 f(x, y, z) = 0. \qquad (1)$$



En posant

$$D = \left(x\frac{\partial}{\partial x_0} + y\frac{\partial}{\partial y_0} + z\frac{\partial}{\partial z_0}\right)f,$$

$$C = \left(x\frac{\partial}{\partial x_0} + y\frac{\partial}{\partial y_0} + z\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^{(2)}f$$

les équations $D = 0$, $C = 0$ représentent respectivement l'axe harmonique et la conique polaire du point P.

Exprimons que l'équation (1) en μ a une racine double; or, pour l'équation

$$a\mu^3 + 3b\mu^2 + 3c\mu + d = 0,$$

la condition est

$$(ad - bc)^2 - 4(ac - b^2)(bd - c^2) = 0;$$

appliquons à (1), il vient

$$\left(ff_0 - \frac{CD}{18}\right)^2 - 4\left(\frac{f_0C}{6} - \frac{D^2}{9}\right)\left(\frac{fD}{3} - \frac{C^2}{36}\right) = 0. \qquad (2)$$

Coupons par la cubique $f = 0$; il reste

$$C^2(2f_0C - D^2) = 0. \qquad (3)$$

Or les points fournis par $C^2 = 0$ sont les points de tangence : les six autres points sont donc sur une autre conique C' d'équation

$$2f_0C - D^2 = 0,$$

c'est-à-dire bitangente à C, D étant la corde de contact : la propriété se trouve établie.

Ch. Faroux, élève à l'École polytechnique.

Les *Nouvelles Annales* ont publié dans les numéros de janvier et février derniers des solutions variées du problème suivant :

Construire une parabole connaissant un point A, *le centre de courbure* Ω *en ce point et la direction des diamètres.*

Voici une solution qui me paraît très simple.

On projette Ω en B sur le diamètre passant par A, puis B en C sur ΩA. C est un point de l'axe. Ensuite prolongeons ΩA vers A d'une longueur $AD = \frac{\Omega A}{2}$, D est un point de la directrice : on a ainsi immédiatement l'axe et la directrice. Ch. F.

ALGÈBRE

233. — *Etudier la série dont le terme général est* $\dfrac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$.

En posant

$$u_n = \frac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)},$$

on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{x+n+1} = \frac{1}{1 + \dfrac{x}{n+1}}.$$

On voit ainsi que si x est négatif, il arrive un moment où le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ devient et reste supérieur à l'unité; la série est donc divergente.

Si x est positif, on peut appliquer la règle de Duhamel :

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = n\frac{x}{n+1}.$$

La limite du second membre est x.

Donc, si $x > 1$, la série est convergente; si $x < 1$, la série est divergente. Dans le cas particulier où $x = 1$, la série proposée est la série harmonique, elle est divergente.

En résumé, si $-\infty < x \leqslant 1$, la série est divergente; si $x > 1$, elle est convergente.

Paul Fages, Faculté des Sciences de Marseille.

Solutions analogues par : MM. A. Bailly, lycée de Dijon ; L. Bassal, lycée de Toulouse ; Paul Begou, lycée de Marseille ; H. Lebesgue, lycée Saint-Louis ; Meynier (Nancy) ; Henri Pellissier, lycée Ampère, à Lyon ; G. Pouilliart, lycée de Clermont.

M. Audibert, à Marseille, a en outre établi qu'on avait

$$S_n = \frac{1}{x-1}\left[1 - \frac{(n+1)!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}\right]. \qquad (1)$$

Mais sa démonstration repose sur des considérations qui ne sauraient trouver place ici.

Nous allons établir cette formule par un procédé plus simple.

Ajoutons l'unité à la somme des n premiers termes et divisons le résultat par x; on peut écrire

$$\frac{1+S_n}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x(x+1)} + \frac{2}{x(x+1)(x+2)} + \ldots \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}. \qquad (2)$$

Si l'on décompose le dernier terme en éléments simples, on trouve aisément

$$\frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)} = \frac{1}{x} - \frac{C_n^1}{x+1} + \frac{C_n^2}{x+2} - \ldots (-1)^n \frac{C_n^n}{x+n}. \qquad (3)$$

Cette formule résulte aussi de ce que le premier membre représente la différence d'ordre n des $n+1$ quantités $\frac{1}{x}, \frac{1}{x+1} \ldots \frac{1}{x+n}$.

Cela posé, remplaçons chaque terme du second membre de la formule (2) par un développement analogue et ajoutons. Le coefficient de $\frac{1}{x+k}$ sera $(-1)^k [C_k^k + C_{k+1}^k + \ldots C_n^k]$, c'est-à-dire $(-1)^k C_{n+1}^{k+1}$, en vertu d'une propriété bien connue du triangle de Pascal.

On aura alors $$\frac{1+S_n}{x} = \frac{C_{n+1}^1}{x} - \frac{C_{n+1}^2}{x+1} + \frac{C_{n+1}^3}{x+2} - \ldots (-1)^n \frac{C_{n+1}^{n+1}}{x+n},$$

ce qui peut s'écrire, en appliquant la formule (3) aux $n+2$ quantités $\frac{1}{x-1}, \frac{1}{x}, \frac{1}{x+1}, \ldots \frac{1}{x+n}$,

$$\frac{1+S_n}{x} = \frac{1}{x-1} - \frac{(n+1)!}{(x-1)x(x+1)\ldots(x+n)},$$

d'où l'on tire $$S_n = \frac{1}{x-1}\left[1 - \frac{(n+1)!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}\right].$$

C'est la relation annoncée.

Si $x > 1$, la quantité $\frac{(n+1)!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$ est le terme général d'une série convergente, analogue à la série proposée, cette quantité a donc pour limite zéro quand n augmente indéfiniment, et S_n a pour limite $\frac{1}{x-1}$.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

219. — *On donne l'ellipse* (E) *ayant pour axes* 2a *et* 2b. *On mène la tangente en un point* M *de cette ellipse et l'on détermine le point* P *où elle rencontre le rayon de l'ellipse qui est perpendiculaire à* OM, O *étant le centre de l'ellipse. On mène ensuite à l'ellipse une tangente dont la direction est conjuguée de* OM *par rapport aux axes. Cette tangente rencontre la précédente en un point* Q *et le rayon* OM *en un point* R. *Trouver les lieux des points* P, Q, R *quand* M *parcourt l'ellipse* (E).

Soit
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$
l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes, et désignons par x', y' les coordonnées d'un point M de cette courbe. On aura la relation
$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 = 0. \qquad (1)$$

La tangente en ce point et la perpendiculaire au rayon OH ont respectivement pour équations
$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1 = 0, \qquad (2)$$
$$xx' + yy' = 0. \qquad (3)$$

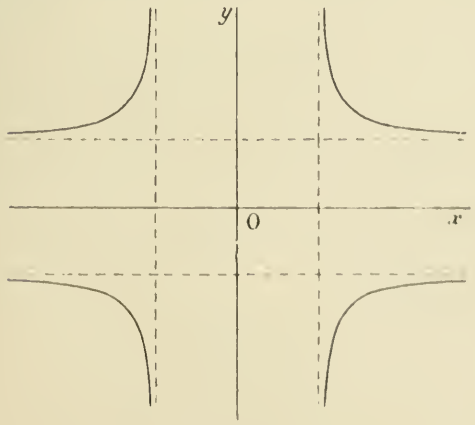
En éliminant x' et y' entre ces trois équations, on aura le lieu du point P.

Des équations (2) et (3) on déduit
$$x' = -\frac{a^2b^2}{c^2x}, \qquad y' = \frac{a^2b^2}{c^2y}$$
et en remplaçant dans (1), on obtient
$$c^4x^2y^2 - a^2b^2(a^2x^2 + b^2y^2) = 0.$$

Le lieu est donc une courbe du quatrième degré symétrique par rapport aux axes. On peut la construire aisément en résolvant par rapport à y^2; elle admet quatre asymptotes
$$x = \pm\frac{b^2a}{c^2}, \qquad y = \pm\frac{a^2b}{c^2}.$$

C'est une *Kreuzcurve*.

La direction conjuguée de OM par rapport aux axes a pour coefficient angulaire $-\frac{y'}{x'}$, une tangente parallèle à cette direction aura pour équation



$$y = -\frac{y'}{x'}x \pm \sqrt{a^2\frac{y'^2}{x'^2} + b^2},$$
ce qui peut s'écrire, en tenant compte de la relation (1),
$$yx' + xy' - \varepsilon ab = 0, \qquad (4)$$
où $\varepsilon = \pm 1$.

En éliminant x' et y' entre (1), (2) et (4), on aura le lieu du point Q.

Or les équations (2) et (4) peuvent s'écrire
$$b^2xx' + a^2yy' - a^2b^2 = 0,$$
$$-\varepsilon ab(yx' + xy') + a^2b^2 = 0.$$

En les ajoutant membre à membre, on a
$$bx'(bx - \varepsilon ay) + ay'(ay - \varepsilon bx) = 0.$$

ou $$(bx' - \varepsilon ay')(bx - \varepsilon ay) = 0.$$

Ce qui montre que le lieu du point Q se compose des deux droites

$$bx \pm ay = 0,$$

c'est-à-dire des diagonales du rectangle construit sur les axes de l'ellipse.

Dans le cas où $$bx' - \varepsilon ay' = 0,$$

c'est-à-dire si le point M est l'extrémité d'un des diamètres conjugués égaux, les équations (2) et (4) représentent la même droite, ainsi qu'on s'en assure géométriquement. On peut donc considérer comme faisant partie du lieu les tangentes à l'ellipse aux extrémités des diamètres conjugués égaux.

Enfin, pour avoir le lieu du point R, on éliminera x' et y' entre les équations (1), (4) et l'équation

$$yx' - xy' = 0 \qquad (5)$$

qui représente la droite OM.

De (4) et (5) on tire

$$x' = \frac{\varepsilon ab}{2y}, \qquad y' = \frac{\varepsilon ab}{2x},$$

et en portant dans la relation (1) on a

$$\frac{b^2}{4y^2} + \frac{a^2}{4x^2} - 1 = 0,$$

équation d'une *Kreuzcurve* qui admet pour asymptotes les droites $x = \pm \frac{a}{2}$, $y = \pm \frac{b}{2}$.

E.-N. Barisien.

Ont résolu la même question : MM. A. Audouin ; A. Bailly, lycée de Dijon ; Charles Braillion, lycée d'Amiens ; Félix Dutech, lycée de Toulouse ; H. Gaubry ; E. Lequintrec, lycée de Toulouse ; Marmion, lycée de Moulins ; C. Rau ; J. Vandier, soldat au 114me d'infanterie, Saint-Maixent.

---

231. — *Étant donnée une cubique à point double, on lui mène les deux tangentes parallèles à une asymptote. Soient* M, M′ *les points de contact. Les droites joignant le point double à ces deux points rencontrent l'asymptote en* m *et* m′. *Démontrer que la cubique rencontre son asymptote en un point qui est le milieu de* mm′. — *Généraliser.*

Prenons le point double O pour origine, pour axe des x une parallèle à l'asymptote considérée, l'axe des y étant quelconque. L'équation de la cubique est

$$f(x, y) = y(ax^2 + bxy + cy^2) + \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 = 0. \qquad (1)$$

L'asymptote a pour équation $$ay + \alpha = 0,$$

et l'abscisse de son point de rencontre avec la cubique est

$$x = \frac{\alpha(c\alpha - a\gamma)}{a(b\alpha - a\beta)}.$$

Les points M et M′ sont à l'intersection de la cubique et de la première polaire relative au point à l'infini sur Ox, laquelle a pour équation

$$f'_x(x, y) = y(2ax + by) + (2\alpha x + \beta y) = 0. \qquad (2)$$

On aura l'équation de l'ensemble des droites OM et OM′ en rendant homogènes les équations (1) et (2), puis en éliminant la variable d'homogénéité entre ces équations.

On a alors successivement

$$(ax^2 + bxy + cy^2)(2\alpha x + \beta y) - (\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2)(2ax + by) = 0,$$

$$(b\alpha - a\beta)x^2 + 2(c\alpha - a\gamma)xy + (c\beta - b\gamma)y^2 = 0,$$

après avoir supprimé le facteur y^2 qui correspond à l'asymptote.

Coupons ces droites par l'asymptote; la somme des abscisses des points de rencontre est

$$\frac{2\alpha(c\alpha - a\gamma)}{a(b\alpha - a\beta)};$$

elle est égale au double de l'abscisse du point de rencontre de l'asymptote et de la courbe; le théorème est démontré.

En faisant une transformation homographique quelconque, on peut énoncer le théorème suivant:

Étant donnée une cubique à point double, on lui mène les deux tangentes par un point A *de la courbe: soient* M, M′ *les points de contact. Les droites joignant le point double à ces deux points rencontrent la tangente à la cubique au point* A *en* m *et* m′. *Le point de rencontre de la cubique et de la tangente en* A *est le conjugué harmonique du point* A *par rapport à* m *et* m′.

(Henri Pellissier, lycée Ampère, à Lyon.)

Solutions semblables par MM. P. Goujon; M. Meynier, école Saint-Sigisbert, à Nancy; J. Vandier, soldat au 114e de ligne à Saint-Maixent.

Généralisation. — *Étant donnée une courbe du* n^e^ *degré admettant un point multiple d'ordre* n − 1, *on lui mène les tangentes (en nombre* 2n − 4) *parallèles à une asymptote. Les droites qui joignent le point multiple aux points de contact rencontrent l'asymptote en des points dont le centre des moyennes distances coïncide avec le centre des moyennes distances des points de rencontre de l'asymptote et de la courbe.*

Prenons le point multiple O pour origine et pour axe des x une parallèle à l'asymptote. L'équation de la courbe est

$$f(x, y) = y(ax^{n-1} + bx^{n-2}y + cx^{n-3}y^2 + \dots) + \alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2}y + \gamma x^{n-3}y^2 + \dots = 0.$$

L'asymptote a pour équation $ay + \alpha = 0$, et l'équation aux abscisses d'intersection des points de rencontre de cette asymptote et de la courbe est

$$x^{n-2}(b\alpha - a\beta) - x^{n-3}\frac{\alpha}{a}(c\alpha - a\gamma) + \dots = 0.$$

L'abscisse du centre des moyennes distances de ces points sera donc

$$x_0 = \frac{\alpha(c\alpha - a\gamma)}{a(b\alpha - a\beta)(n-2)}.$$

L'équation de l'ensemble des droites joignant l'origine aux points de contact des tangentes parallèles à Ox s'obtient en éliminant x entre les équations $f(x, y) = 0$ et $f'_x(x, y) = 0$.

On trouve ainsi

$$(ax^{n-1} + bx^{n-2}y + cx^{n-3}y^2 + \dots)[(n-1)\alpha x^{n-2} + (n-2)\beta x^{n-3}y + (n-3)\gamma x^{n-4}y^2 + \dots]$$
$$- (\alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2}y + \gamma x^{n-3}y^2 + \dots)[(n-1)ax^{n-2} + (n-2)bx^{n-3}y + (n-3)(cx^{n-4}y^2 + \dots) = 0$$

ou

$$(b\alpha - a\beta)x^{2n-4} + 2(c\alpha - a\beta)x^{2n-5}y + \dots = 0.$$

Les abscisses des points de rencontre de ces droites avec l'asymptote sont données par

$$(b\alpha - a\beta)x^{2n-4} - 2\frac{\alpha}{a}(c\alpha - a\beta)x^{2n-5} + \dots = 0;$$

par suite le centre des moyennes distances de ces points est

$$x_1 = \frac{2\alpha(c\alpha - a\beta)}{a(b\alpha - a\beta)(2n-4)} = x_0.$$

G. Bloch, lycée de Dijon.

Seconde solution. — Nous allons établir le théorème pour la cubique tel qu'il a été énoncé à la fin de la première solution.

Désignons par N le point de rencontre de la cubique et de la tangente au point A. Nous prendrons pour triangle de référence le triangle AON. La cubique aura pour équation

$$axy^2 + z(bx^2 + 2cxy + dy^2) = 0.$$

La première polaire du point A $(y = 0,\ z = 0)$ aura pour équation

$$ay^2 + 2z(bx + cy) = 0;$$

en éliminant z entre ces deux équations, on obtient l'équation

$$bx^2 - dy^2 = 0,$$

qui représente les droites OM et OM′, et l'on voit ainsi que ces droites sont conjuguées harmoniques par rapport à OA et ON.

A. Marmion, lycée de Moulins; L.-P. Randon.

Solution géométrique. — Menons une parallèle à l'asymptote : elle rencontre la cubique en deux points H et K; les droites OH et OK engendrent deux faisceaux homographiques quand la parallèle se déplace, et l'on voit de plus que les faisceaux sont en involution; les rayons doubles de cette involution sont les droites OM et OM′; ces droites divisent harmoniquement OH et OK quelle que soit la position de la sécante, et quand cette sécante coïncide avec l'asymptote, les droites OH et OK deviennent, l'une la droite ON, l'autre la parallèle à l'asymptote menée par le point O; le point N est donc le milieu de mm'.

Paul Begou; Perrin, à Lyon.

Autres solutions géométriques par MM. A. Audouin; H. Cheronnet, Condorcet; Félix Dutech, lycée de Toulouse; H. Lebesgue, Saint-Louis; Eugène Lequintrec, lycée de Toulouse; P. Valot.

---

234. — *Etant donné un quadrilatère* ABCM *dont trois sommets* A, B, C *sont fixes, le quatrième parcourant une droite* Δ :

1° Trouver le lieu du milieu de la troisième diagonale UV *du quadrilatère complet;*

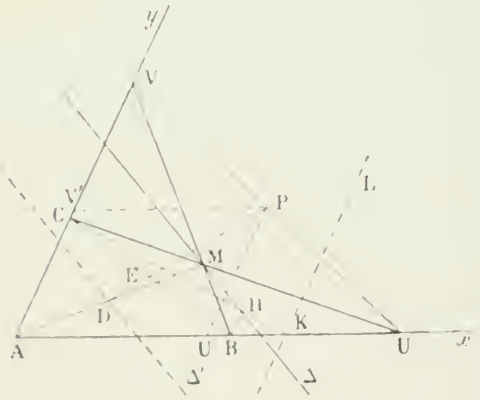
2° Étant donné un point P *du lieu, construire le quadrilatère correspondant.*

1° Prenons pour axes AB et AC, désignons par a et b les longueurs AB et AC, et soit

$$ux + vy + w = 0,$$

l'équation de la droite Δ.

Soient x', y' les coordonnées d'un point M de cette droite; les équations des droites BM et CM sont respectivement



$$\frac{y}{x-a} = \frac{y'}{x'-a}, \qquad \frac{y-b}{x} = \frac{y'-b}{x'};$$

coupant la première par Ay et la deuxième par Ax, on a les coordonnées des points V et U d'où l'on déduit celles du point P,

$$x = \frac{-bx'}{2(y'-b)}, \qquad \text{et} \qquad y = \frac{-ay'}{2(x'-a)}. \qquad (1)$$

On aura l'équation du lieu en éliminant x', y' entre les équations (1) et la suivante :

$$ux' + vy' + w.$$

Ces équations peuvent d'ailleurs s'écrire

$$bx' + 2xy' - 2bx = 0,$$
$$2x'y + ay' - 2ay = 0,$$
$$ux' + vy' + w = 0.$$

et le résultat de l'élimination peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} b & 2x & -2bx \\ 2y & a & -2ay \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0,$$

ou, encore, en développant,

$$4xy(au + bv + w) - ab(2ux + 2vy + w) = 0.$$

Le lieu est une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux axes et qui passe par les points de rencontre de AB et de AC avec la droite Δ' menée parallèlement à Δ à une distance moitié moindre de l'origine et du même côté.

Dans le cas particulier où $ua + vb + w = 0$, c'est-à-dire quand Δ passe par le quatrième sommet du parallélogramme construit par AB et AC, le lieu se réduit à la droite Δ'.

2° Les milieux D, E, P des trois diagonales sont en ligne droite. Le point D décrit la droite Δ'. Si l'on se donne P, la droite PE rencontrera Δ' au point D, et en tirant AD on aura le point M.

Eugène Lequintrec, lycée de Toulouse.

Solution géométrique. — Quand le point M décrit la droite Δ, les points U et V décrivent sur AB et AC des divisions homographiques; il en est de même des points U′ et V′, milieux de AU et BV; alors les droites U′P et V′P respectivement parallèles aux droites AC et AB peuvent être considérées comme des rayons homologues de faisceaux homographiques dont les sommets sont à l'infini dans les directions AB et AC. Le lieu du point P est donc une hyperbole dont les directions asymptotiques sont AB et AC. On aura les asymptotes en cherchant dans chaque faisceau le rayon homologue de la droite de l'infini. Menons par le point B une parallèle à AC qui rencontre Δ en H; tirons CH qui rencontre AB au point K et en menant KL parallèle à AC, on a une asymptote; la construction est analogue pour la deuxième asymptote.

Dans le cas où Δ passe par le quatrième sommet du parallélogramme construit sur AB et AC, le point H coïncide avec ce sommet, le point K est à l'infini, la droite de l'infini se correspond à elle-même dans les deux faisceaux et le lieu se réduit à une droite, c'est la droite Δ'.

Ce résultat peut s'établir fort simplement, car dans le cas particulier où nous sommes la droite Δ' passe par les milieux de BC et de AM, elle doit donc contenir le point P.

A. Audouin.

Ont envoyé des solutions analytiques exactes : MM. A. Bailly, lycée de Dijon; L. Bassal, lycée de Toulouse; C. Bergman; Louis Espinat instituteur à Espinchal (Puy-de-Dôme); Ernest Foucard, lycée Michelet; Louis Graux, lycée de Nantes; E. Guedon, lycée Saint-Louis; J. Marchal, soldat au 89e de ligne, à Courbevoie; M. Meynier, école Saint-Sigisbert, à Nancy; C. Wavrant, répétiteur, à Draguignan.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (1880)

Solution descriptive.

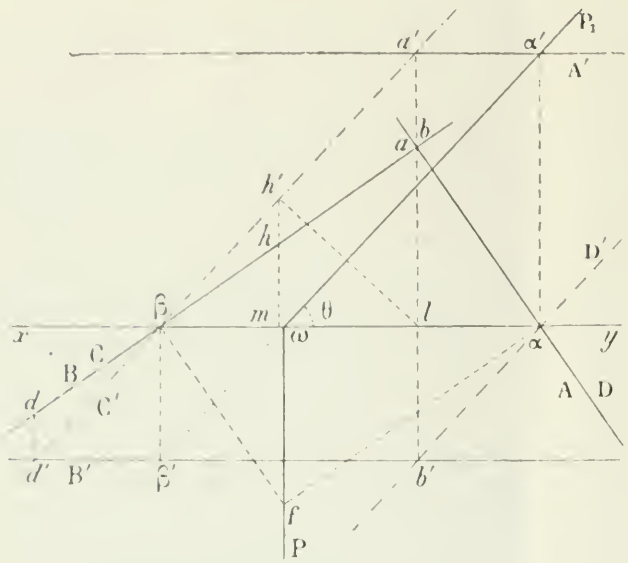
280. — *Étant donné un paraboloïde hyperbolique, on considère une génératrice rectiligne* A *de cette surface et la génératrice* B *du même système qui lui est perpendiculaire. Par les points* a, b *où ces droites sont rencontrées par leur perpendiculaire commune passent deux génératrices* A′, B′. *Soient* a′, b′ *les points où les deux droites* A′ *et* B′ *sont rencontrées par leur perpendiculaire commune.*

1° Trouver le lieu des points a, b *et celui des points* a′, b′ *quand* A *décrit le paraboloïde.*

2° Trouver le lieu des points de rencontre des droites A *et* B′ *ou* A′ *et* B.

3° Calculer le rapport des longueurs ab *et* a′b′ *des perpendiculaires communes et étudier la variation de ces longueurs.*

1. — Le plan vertical est le plan tangent au sommet ω du paraboloïde. Le plan horizontal est le plan parallèle à l'un des plans directeurs et passant par l'axe. L'autre plan directeur passant par l'axe est alors de bout. Soit $P\omega P_1$ ce plan. J'achève la détermination du paraboloïde par la donnée du foyer de la parabole contour apparent du paraboloïde sur le plan horizontal. Soit f ce foyer sur $P\omega$. La droite xy est tangente à cette parabole au point ω. C'est la tangente au sommet. Les droites xy et $P_1\omega$ sont deux génératrices de la surface.



Cherchons une génératrice quelconque parallèle au plan horizontal. Elle rencontre la droite ωP_1 en $\alpha\alpha'$, point quelconque de cette droite. Il faut, pour avoir la projection horizontale de cette génératrice, mener par α une tangente à la parabole de contour apparent horizontal. Pour cela je mène par α une perpendiculaire sur la droite $f\alpha$. Soit A. La projection verticale est du reste A' parallèle à xy menée par α'.

La génératrice du même système perpendiculaire à AA' s'obtient en menant $f\beta$ perpendiculaire sur $f\alpha$, et par β la perpendiculaire à $f\beta$. La ligne de rappel β donne sur $P_1\omega$ le point β', d'où la génératrice BB'.

Les deux droites (AA'), (BB') étant horizontales, leur perpendiculaire commune est la verticale a du point de rencontre de leurs projections horizontales, qui donne les deux points aa', bb'. Je remarque que la distance al du point a à xy est constante et égale à $f\omega$. Donc le point a décrit la directrice de la parabole considérée. Le lieu des points aa', bb' est donc la section du paraboloïde par le plan de front passant par cette directrice.

Nous verrons dans la suite que ce plan n'est autre que le plan de Monge et par suite le lieu eût été le même si on était parti de l'autre plan directeur.

Cherchons les deux autres génératrices passant par aa' et bb'. Soit CC' la génératrice passant par aa'. Elle doit rencontrer la ligne de terre et la génératrice BB'. Mais comme a est sur B, sa projection horizontale est B elle-même, et par suite elle rencontre la ligne de terre au point β ($\beta a'$ est d'ailleurs parallèle à $P_1\omega$).

DD' passant par bb' s'obtient de la même façon.

Cherchons la perpendiculaire commune à CC' et DD'. Je remarque que les projections verticales de ces deux droites sont parallèles; par suite, la perpendiculaire commune est une droite de front dont la projection verticale est perpendiculaire à C' et à D'.

Mais on sait que toutes les droites de front s'appuyant sur deux droites dont les projections verticales sont parallèles, passent en projection verticale par un point fixe. Cherchons ce point fixe dans le cas présent. C'est le point l projection de a sur xy (en effet, deux lignes de front particulières sont xy et la ligne de front a).

Par l je mène donc une perpendiculaire sur C', D', d'où le point hh' pied de la perpendiculaire commune sur CC'. Soit m le point de rencontre de hh' avec xy. Je dis que hm est constant.

On a en effet
$$\frac{hm}{al} = \frac{\beta m}{\beta l}.$$

Mais on a
$$\beta m = \beta h' \cos \theta,$$

θ étant l'angle des deux plans directeurs;

$$\beta l = \frac{\beta h'}{\cos \theta},$$

et par suite $$hm = al \cos^2 \theta.$$

Or, al est constant; par suite, hm l'est aussi.

Donc le lieu des points hh' est une hyperbole, section du paraboloïde par un plan de front perpendiculaire à l'axe.

2. — Le lieu des points a', b' est l'hyperbole projection verticale de l'hyperbole de Monge déjà trouvée. Elle admet comme asymptotes les droites xy et $P_1\omega$. Les droites BB', CC' se coupent au point dd'. Remarquons la construction du point d'. On a mené par a' et b', points de l'hyperbole, des parallèles aux asymptotes de l'hyperbole. Donc, quand $a'b'$ se déplace parallèlement à sa direction, le point d' décrit le diamètre conjugué de cette direction dans l'hyperbole, et par suite le lieu du point dd' est la section du paraboloïde par le plan diamétral conjugué de la verticale.

La projection horizontale de cette courbe est précisément la parabole de contour apparent horizontal.

Cette courbe est aussi la ligne de striction du paraboloïde.

En opérant avec l'autre plan directeur on obtiendrait une deuxième parabole, dont le plan serait symétrique du plan de la première par rapport aux plans principaux.

3. — La longueur de la première perpendiculaire commune est $a'b'$ et celle de la perpendiculaire commune entre CC', DD' est mesurée par la distance des deux parallèles C', D'. Soit $a'g'$. Mais on a

$$\frac{a'g'}{a'b'} = \cos \theta.$$

Le rapport des plus courtes distances est donc constant.

Étudions la variation de chacune des longueurs. Il suffit d'étudier celle de $a'b'$.

On voit sur la figure que dans tous les cas les points $a'b'$ sont sur deux branches différentes de l'hyperbole, car le point a est toujours à gauche de $\alpha\alpha'$ et à droite de $\beta\beta'$. Par suite, la longueur $a'b'$ part de l'infini quand $\beta\beta'$ est à l'infini, puis décroît jusqu'à une valeur minima (longueur du diamètre parallèle), et repasse ensuite par les mêmes valeurs.

Remarque sur la première partie. — AA' et CC' sont rectangulaires, car AA' est horizontal et la projection horizontale C est perpendiculaire sur A. Il en résulte que le point aa' est sur l'hyperbole de Monge.

(Gustave Plaisant, lycée Charlemagne.)

PHYSIQUE

172. — *Un poids* P *d'un certain corps, dont la température de fusion est* T, *est surfondu à une température* $t_1 < T$. *On en détermine la solidification par un moyen quelconque. Connaissant sa chaleur de fusion* λ_0 *à la température* T *de fusion et ses chaleurs spécifiques à l'état solide et à l'état liquide* c *et* c_1, *trouver la relation qui lie le poids* p *de la portion solidifiée à la température* t° *et cette température* t. *Construire la courbe représentée par cette relation.*

On admettra que les chaleurs spécifiques c *et* c_1 *sont indépendantes de la température; mais on tiendra compte de ce que* λ *varie avec la température.*

Application numérique. — *A quelle température doit-on amener du phosphore ou de l'eau surfondue pour que toute la masse se solidifie et remonte à la température de fusion* T :

	T	λ	c	c_1
Eau :	0°	71	0,47	1
Phosphore :	44°,2	15	0,17	0,24.

Désignons par $p + dp$ la masse solidifiée à la température $t + dt$; on a

$$\lambda dp = [cp + c_1(P - p)]dt, \qquad (1)$$

λ étant la chaleur de fusion à la température t.

1° Nous supposerons d'abord qu'on puisse supposer $\lambda = \lambda_0$, c'est-à-dire que λ est indépendant de la température.

L'équation (1) s'écrit alors : $\lambda_0 dp = [cp + c_1(P - p)]dt$

ou
$$\frac{1}{c - c_1} \cdot \frac{(c - c_1)dp}{(c - c_1)p + c_1 P} = \frac{dt}{\lambda_0}.$$

Intégrant, nous avons la relation cherchée, à une constante près, K :

$$\frac{1}{c - c_1} L . [(c - c_1)p + c_1 P] = \frac{t}{\lambda_0} + K. \qquad (2)$$

Or, t_1 étant la température où le corps était en surfusion, on a pour cette température $p = 0$, d'où

$$\frac{1}{c - c_1} L . c_1 P = \frac{t_1}{\lambda_0} + K. \qquad (3)$$

Éliminant la constante, la relation cherchée devient

$$\frac{1}{c - c_1} L . \frac{(c - c_1)p + c_1 P}{c_1 P} = \frac{t - t_1}{\lambda_0}$$

ou
$$t - t_1 = \frac{\lambda}{c - c_1} L . \left[\frac{(c - c_1)p}{c_1 P} + 1\right],$$

d'où l'on peut tirer la proportion solidifiée $\frac{p}{P}$.

Pour la température de fusion T, la formule devient

$$T - t_1 = \frac{\lambda}{c - c_1} L . \left[\frac{(c - c_1)}{c_1} \cdot \frac{p}{P} + 1\right].$$

Si nous voulons que tout le corps soit solidifié et remonte à la température de fusion T, c'est-à-dire si nous voulons $p = P$, la formule nous donne la valeur que doit avoir la surfusion $T - t_1$:

$$T - t_1 = \frac{\lambda}{c - c_1} L . \frac{c}{c_1}.$$

Application numérique :

Eau : $T - t_1 = 19°,077$,

Phosphore : $T - t_1 = 13°,7843$.

2° Supposons que la chaleur de fusion ne puisse pas être considérée comme indépendante de la température.

Un poids 1 du corps dégage en se solidifiant à $t°$, λ calories. Cherchons λ en fonction de λ_0. Exprimons dans ce but, de deux façons différentes, la quantité de chaleur mise en jeu quand un poids 1 du corps surfondu à $t°$ passe à l'état solide à T°.

a) Si nous supposons que cette masse se solidifie à $t°$, puis remonte à T, la quantité de chaleur dégagée est $\lambda - c(T - t)$.

b) Supposons que le corps liquide remonte d'abord à T°, puis se solidifie ; la quantité de chaleur dégagée est alors $- c_1(T - t) + \lambda_0$.

Comme dans les deux cas on passe d'un même état initial à un même état final, on a

$$\lambda - c(T - t) = \lambda_0 - c_1(T - t),$$

d'où

$$\lambda = \lambda_0 + (c - c_1)(T - t).$$

Remplaçant dans l'équation (1) λ par cette valeur, nous avons la relation

$$[\lambda_0 + (c_1 - c)(t - T)]dp = [cp + c_1(P - p)]dt$$

ou

$$\frac{dp}{(c - c_1)p + c_1P} = \frac{dt}{\lambda_0 + (c_1 - c)(t - T)}.$$

Intégrant, nous avons la relation cherchée, à une constante près :

$$\frac{1}{c - c_1}\left[L.[(c - c_1)p + c_1P] + L.[\lambda_0 + (c_1 - c)(t - T)]\right] = 0$$

ou bien, faisant rentrer $c - c_1$ dans la constante,

$$[(c - c_1)p + c_1P][\lambda_0 + (c_1 - c)(t - T)] = K.$$

Pour $t = t_1$, $p = 0$, d'où

$$c_1P[\lambda_0 + (c_1 - c)(t_1 - T)] = K.$$

On a donc finalement

$$[(c - c_1)p + c_1P][\lambda_0 + (c_1 - c)(t - T)] = c_1P[\lambda_0 + (c_1 - c)(t_1 - T)],$$

qui est la relation demandée entre p et t, relation qui indique la marche de la solidification en fonction de la température. Elle représente une hyperbole équilatère, d'asymptotes

$$p = \frac{c_1P}{c_1 - c}, \qquad t = T - \frac{\lambda_0}{c_1 - c}.$$

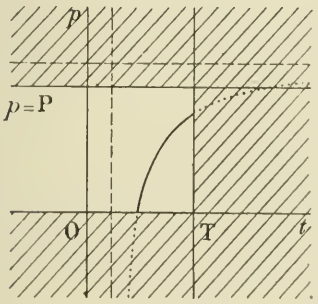


Fig. 1.

Pour savoir quelles sont les parties de la courbe correspondant au phénomène, il suffit de discuter la possibilité du phénomène.

Il faut d'abord évidemment qu'on ait $t < T$: toute la partie de la courbe située à droite de la droite $t = T$ est donc à rejeter.

De même il faut $p < P$: toute la partie de la courbe dont les ordonnées surpassent P est aussi à exclure ; il faut aussi $p > 0$.

Il n'y a à considérer *(fig. 1)* que la partie de la courbe située dans la partie non hachurée du plan.

Le seul arc de l'hyperbole correspondant au phénomène est l'arc partant du point $p = 0$, $t = t_1$, jusqu'à son point de rencontre avec celle des deux droites $t = T$ ou $p = P$ qu'il rencontre la première, d'où les trois cas suivants :

1° La solidification est complète avant d'avoir atteint le point de fusion T *(fig. 2)*;

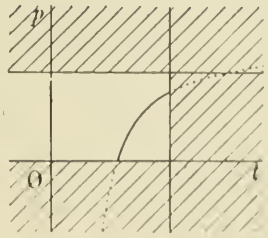


Fig. 2.

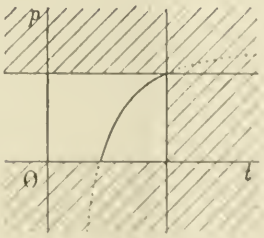


Fig. 3.

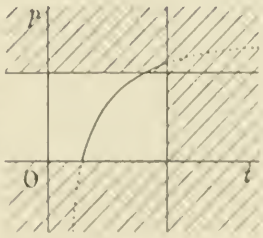


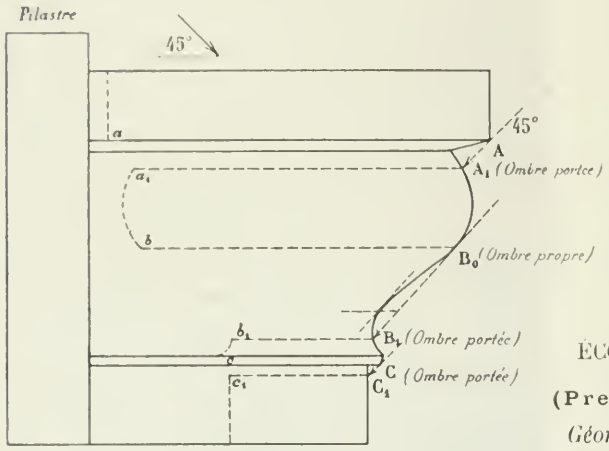
Fig. 4.

2° La solidification devient complète, précisément à la température T° *(fig. 3)*;

3° La solidification est encore incomplète à T° *(fig. 4)*.

Gaston-Henri Niewenglowski, infirmier de bataillon au 69e de ligne, Nancy.

CONCOURS DE 1893 *(suite).*



ÉCOLE POLYTECHNIQUE *(suite).*

Lavis.

TALON DROIT

Exécuter à l'encre de Chine, à teintes plates ou à teintes fondues (à volonté), le lavis du *talon droit* accompagné d'un pilastre vertical dont le trait est donné.

Les lignes pointillées donnent les contours des ombres. Le pilastre doit être teinté.

(30 mai, de 2 h. à 4 h. 1/2.)

ÉCOLE CENTRALE

(Première Session.)

Géométrie analytique.

281. — Étant donnés deux axes rectangulaires et, sur l'axe des x, deux points A, B dont les abscisses sont a et b, sur l'axe des y un point C dont l'ordonnée est c, on considère le faisceau des hyperboles équilatères qui passent par les trois points A, B, C.

1° Former l'équation de celle de ces hyperboles qui a une asymptote dont le coefficient angulaire est un nombre donné λ, et former l'équation de cette asymptote.

Par un point quelconque du plan on peut mener une ou trois droites telles que chacune soit une asymptote d'une des hyperboles considérées. Former l'équation du lieu des points par lesquels passent trois droites qui satisfont à cette condition, et qui de plus sont telles que deux d'entre elles sont rectangulaires. — Construire ce lieu, indiquer les points où il rencontre les côtés du triangle ABC, puis, prenant un point quelconque M sur ce lieu, trouver le centre de chacune des hyperboles considérées qui a une asymptote passant par ce point M.

2° Former l'équation de celle des hyperboles considérées qui a un axe dont le coefficient angulaire est un nombre donné μ, et former l'équation de cet axe.

Par un point quelconque du plan on peut mener une ou trois droites telles que chacune soit un axe d'une des hyperboles considérées. — Former l'équation du lieu des points par lesquels passent trois droites qui satisfont à cette condition, et qui de plus sont telles que deux de ces droites ont des coefficients angulaires égaux et de signes contraires. — Construire la ligne représentée par cette équation; et, sur cette ligne, limiter les parties sur lesquelles doit être un point pour que, par ce point, passent *trois droites réelles* satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

(17 juillet, de 7 h. à 11 h.)

Calcul trigonométrique.

Calculer les côtés et les angles d'un triangle dont on donne les médianes α, β, γ, issues respectivement des sommets A, B, C du triangle :

$$\alpha = 120000, \qquad \beta = 90000, \qquad \gamma = 60000.$$

(17 juillet, de 2 h. 1/2 à 4 h.)

Physique et Chimie.

I. **282.** — Un thermomètre pesant A^{gr} ne pèse plus que B^{gr} dans l'eau. Déduire de ces données le poids approximatif de mercure qu'il contient.

Application numérique :

Poids spécifique du mercure . . . $\delta = 13,6$,
— du verre. . . . . $d = 2,4$.
$A = 23^{gr},76$, $B = 20^{gr},04$.

II. **283.** — Dans un miroir concave de rayon R dont l'axe est vertical on a versé un liquide. Sur l'axe à distance p est une source monochromatique P; l'indice du liquide pour les radiations qu'elle émet est n.

On demande d'établir la formule qui permet de calculer la distance p' à laquelle se formera le foyer conjugué P′ du point P pour les rayons centraux, le système optique étant supposé sans épaisseur.

III. — Des propriétés chimiques du chlore. Insister tout spécialement sur les réactions d'addition, de substitution et d'oxydation données par ce métalloïde.

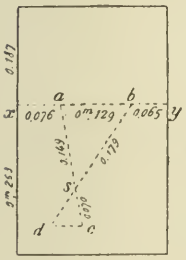
IV. — Établir la formule de l'acide chlorhydrique. Vérifier la formule trouvée par la considération du poids moléculaire connaissant la densité 1,27 du gaz chlorhydrique.

(18 juillet, de 7 h. à 10 h.

Géométrie descriptive.

284. — L'axe d'un cône de révolution supposé plein est situé dans le plan horizontal de projection ; on considère les deux demi-nappes de ce cône situées au-dessus du plan horizontal et limitées à des plans parallèles ; on les coupe par un cylindre oblique à base de cercle ; on enlève du cône les parties situées dans l'intérieur du cylindre. On demande de représenter par ses projections le demi-cône solide dans lequel on a pratiqué ainsi une entaille cylindrique.

L'axe du cône est la bissectrice de l'angle en s du triangle asb.



Le côté ab coïncide avec la ligne de terre, et l'on a

$$xa = 0^m,076, \qquad ab = 0^m,129, \qquad by = 0^m,065.$$
$$as = 0^m,149, \qquad bs = 0^m,179.$$

Les plans parallèles qui limitent le cône sont les suivants :

1° Le plan mené par la ligne de terre et dont la partie supérieure fait avec la partie antérieure du plan horizontal un angle de 60° ;

2° Le plan parallèle au précédent dont la trace horizontale cd est déterminée par $sc = 0^m,070$.

La base du cylindre est un cercle de $0^m,060$ de rayon, situé dans le plan vertical de projection au-dessus de la ligne de terre et tangent en b à cette ligne ; les génératrices horizontales du cylindre sont parallèles à sb.

On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour déterminer :

1° Un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point ;

2° Un point quelconque de l'une des bases du cône et la tangente en ce point ;

3° Un point quelconque de la trace du cylindre sur l'un des plans de base du cône et la tangente en ce point.

Titre extérieur : INTERSECTION DE SURFACES.

Titre intérieur : CÔNE ENTAILLÉ PAR UN CYLINDRE.

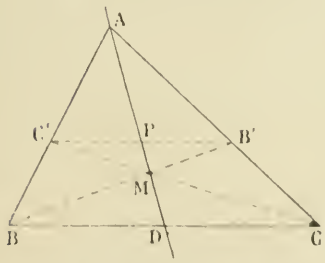
Les titres, en lettres dessinées, sont de rigueur. — Le cadre a $0^m,450$ sur $0^m,270$. La ligne de terre est parallèle aux petits côtés du cadre à $0^m,263$ du petit côté inférieur et à $0^m,187$ du petit côté supérieur.

(18 juillet, de 7 h. à 11 h.)

AGRÉGATION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL

Algèbre et trigonométrie.

285. — On considère un triangle ABC et une droite fixe Δ passant par le point A et coupant au point D le côté opposé BC. Soit M un point pris sur Δ ; la droite BM coupe le côté AC en B′, et la droite CM coupe le côté AB en C′. On trace B′C′ qui coupe en P la droite Δ.



1° Quelle doit être la position de M sur Δ pour que l'on ait

$$\overline{MP} \cdot \overline{MA} = k \cdot \overline{AD}^2,$$

k désignant une constante donnée? En posant $\frac{MA}{AD} = x$, on montrera que x dépend d'une équation du troisième degré ne renfermant que la constante k.

Discuter cette équation.

2° Trouver quelle doit être, sur Δ, la position du point M pour que l'aire du triangle MB′C′ soit à celle du triangle ABC dans un rapport connu m.

Dans ce problème, on posera encore $\frac{MA}{AD} = x$.

Pour quelles valeurs de x la quantité m passe-t-elle par un maximum ou par un minimum? Discuter l'équation correspondante.

On propose enfin de résoudre cette équation quand on suppose le point D situé au milieu de BC.

Géométrie descriptive.

On donne un hyperboloïde de révolution à une nappe dont l'axe est vertical et dont les génératrices font un angle de 45° avec le plan horizontal. La ligne de terre étant le petit axe de la feuille, la projection horizontale de l'axe de l'hyperboloïde sera sur le grand axe de la feuille, à 8^{cm} en avant du plan vertical; la cote du centre sera 8^{cm}, et le rayon du cercle de gorge sera 4^{cm}.

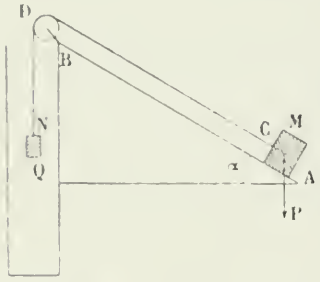
On considère la génératrice de front F de l'hyperboloïde dont la projection horizontale est en avant du centre et dont la trace horizontale est à gauche du grand axe de la feuille :

1° Démontrer que les normales à l'hyperboloïde en tous les points de F engendrent un paraboloïde hyperbolique. Déterminer les plans directeurs et le sommet de ce paraboloïde; — construire ses contours apparents en projection; — construire les projections de son intersection avec l'hyperboloïde; — expliquer les constructions faites pour obtenir les projections d'un point de l'intersection et de la tangente en ce point;

2° On fait tourner ce paraboloïde de 90° autour de la droite F; — construire ses contours apparents en projection dans sa nouvelle position et les projections de son intersection avec l'hyperboloïde; — expliquer les résultats obtenus.

Mécanique.

Un corps M, de poids P, est placé en bas d'un plan incliné AB, de longueur l, qui fait un angle α avec l'horizon. Une corde CDN, inextensible et sans masse, attachée au corps M, vient s'enrouler sur le cylindre d'un treuil, de rayon r, placé à la partie supérieure du plan incliné, et son autre extrémité N supporte un poids Q. Sous l'action de ce poids Q, le treuil tourne, et le corps M, qui d'abord était au repos au point A, monte le long du plan incliné. Le poids Q descend dans un puits dont la profondeur h, comptée à partir de la position initiale du poids Q, est inférieure à l.



1° Calculer h de telle sorte que le corps M arrive sans vitesse au sommet B du plan incliné.

2° A ce moment, on place sur le corps M une surcharge de poids $p = Q$, et on fait agir sur le treuil un frein qui produit un moment résistant μ. Le corps M commence à redescendre vers le point A.

Calculer μ de telle sorte que le corps M arrive sans vitesse en bas du plan incliné.

On négligera toutes les résistances passives ainsi que les dimensions du corps M et du poids Q. On admettra que la corde ne peut pas glisser sur le treuil et que pendant que le poids Q demeure immobile au fond du puits, elle reste tendue entre le treuil et le corps M, cette portion CD de corde étant d'ailleurs toujours parallèle au plan incliné. On remarquera qu'à une certaine époque de la descente du corps M la corde tout entière se trouve brusquement tendue et qu'il se produit un choc.

On indiquera comment les résultats trouvés devraient être modifiés si l'on tenait compte de l'inertie du treuil, son poids étant représenté par 2P'.

Nous avons oublié de mentionner M. J. Hais (Étampes) qui a envoyé une solution exacte de la question 216.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX. — 15750-7-93

3e Année. N° 12. Septembre 1893.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

ÉQUATION DU SYSTÈME DES QUATRE DIRECTRICES D'UNE CONIQUE

D'après **Édouard Lucas** (*).

Soit $$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$
l'équation de la conique.

Cherchons d'abord la condition pour qu'une directrice de cette conique passe par l'origine.

S'il en est ainsi, c'est que l'équation de la conique pourra s'écrire sous la forme
$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (lx + my)^2,$$
α, β étant les coordonnées du foyer correspondant à la directrice qui passe par l'origine.

On pourra donc déterminer des nombres α, β, l, m, λ de telle sorte qu'on ait identiquement
$$f(x, y) \equiv \lambda\,[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - (lx + my)^2]$$
ou
$$f(x, y) - \lambda\,[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2] \equiv -\lambda(lx + my)^2.$$

Ainsi, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une directrice passe par l'origine, c'est qu'on puisse trouver des nombres λ, α, β tels que la fonction
$$f(x, y) - \lambda[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2]$$
soit le carré d'une fonction linéaire et homogène de x et y.

Or, S désignant une racine de l'équation
$$(A - S)(C - S) - B^2 = 0,$$
nous savons que l'expression $$\varphi(x, y) - S(x^2 + y^2)$$
satisfait précisément à cette condition, si nous exprimons par $\varphi(x, y)$ comme d'usage, l'ensemble des termes du second degré.

λ devra donc être égal à S, et, en outre, il faudra qu'on ait
$$D + S\alpha = 0, \qquad E + S\beta = 0, \qquad F - S(\alpha^2 + \beta^2) = 0.$$

En éliminant α et β entre ces trois relations, nous arrivons à la relation cherchée
$$S = \frac{D^2 + E^2}{F}.$$

Ceci établi, transportons les axes coordonnés, parallèlement à eux-mêmes, au point x_0, y_0. Si X, Y, désignent les nouvelles coordonnées courantes, l'équation de la conique, rapportée aux nouveaux axes, est
$$\varphi(X, Y) + Xf'_{x_0} + Yf'_{y_0} + f(x_0, y_0) = 0.$$

Si nous exprimons sur cette nouvelle équation que la directrice passe par l'origine, nous aurons entre x_0 et y_0 une relation qui sera évidemment l'équation cherchée du système des quatre directrices.

(*) Cette solution avait été communiquée verbalement par Édouard Lucas à M. Cretin, professeur au lycée Saint-Louis; la rédaction en est due à M. Paul Lucas, fils de l'auteur, et qui se trouve précisément être aujourd'hui élève de spéciales dans la classe de M. Cretin. (Note communiquée par M. Laisant.)

L'équation en S formée sur cette équation étant la même que celle qu'on formerait sur l'équation primitive, l'équation cherchée est donc

$$\left[A - \frac{f_x'^2 + f_y'^2}{4f(x, y)}\right]\left[C - \frac{f_x'^2 + f_x'^2}{4f(x, y)}\right] - B^2 = 0.$$

On peut présenter la solution précédente d'une manière un peu différente, en évitant de transporter l'origine en un point qui peut être imaginaire.

L'équation focale étant $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - (lx + my + h)^2 = 0$,

on doit avoir identiquement, pour une valeur convenable de λ :

$$f(x, y) - \lambda[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2] \equiv - \lambda(lx + my + h)^2.$$

Il en résulte que l'équation $f(x, y) - \lambda[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2] = 0$ (1)

représente deux droites confondues avec la directrice relative au foyer α, β. Les équations du centre de la conique (1) étant

$$f_1 - \lambda(x - \alpha) = 0, \tag{2}$$

$$f_2 - \lambda(y - \beta) = 0, \tag{3}$$

où $f_1 \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}$, $f_2 \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}$, ces équations doivent être identiques, ce qui prouve déjà que λ est une racine de l'équation en S; en outre, toute solution des équations (2) et (3) doit vérifier l'équation obtenue en égalant à zéro la dérivée par rapport à z, ce qui donne

$$f_3 + \lambda[\alpha(x - \alpha) + \beta(y - \beta)] = 0, \tag{4}$$

où l'on a posé $f_3 \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z}$. Les équations (2), (3), (4) donnent

$$\alpha f_1 + \beta f_2 + f_3 = 0. \tag{5}$$

Mais en ajoutant les équations (2), (3), (5) membre à membre après multiplication par $f_1, f_2, -\lambda$, on obtient

$$f_1^2 + f_2^2 - \lambda(xf_1 + yf_2 + f_3) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lambda f = f_1^2 + f_2^2.$$

Donc les coordonnées x, y d'un point quelconque d'une des directrices vérifient l'équation

$$\left(A - \frac{f_1^2 + f_2^2}{f}\right)\left(C - \frac{f_1^2 + f_2^2}{f}\right) - B^2 = 0,$$

ou, en développant, $(AC - B^2)f^2 - (A + C)(f_1^2 + f_2^2)f + (f_1^2 + f_2^2)^2 = 0.$ (B. N.)

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

---

243. — *Dans un plan* P, *on donne un point* A *et un cercle de centre* O *et de rayon* r. *Un point* S *de l'espace se projette orthogonalement sur le plan* P *en un point* B *situé au milieu de* OA; *on donne* SB = h *et* AO = a. *Par le point* A *on trace dans le plan* P *une sécante* AMN *qui rencontre le cercle* O *aux points* M *et* N *que l'on joint au point* S. *Le triangle* SMN, *en tournant autour de* MN *comme charnière, engendre un volume* V.

Étudier les variations de ce volume lorsque la sécante AMN *tourne autour du point* A.

Donner un tableau récapitulatif de ces variations.

(Certificat d'aptitude à l'enseignement spécial, 1892, 1re session.)

Abaissons du point S, SC perpendiculaire sur MN; le volume considéré est égal à la somme ou à la différence de deux cônes de révolution ayant pour rayon de base commun SC et pour hauteurs respectives CN et CM. Il en résulte que

$$V = \frac{\pi}{3}\,\overline{SC}^2 . MN .$$

Soit x l'angle OAM; menons la droite BC qui est perpendiculaire à AM.

On a
$$\overline{SC}^2 = \overline{SB}^2 + \overline{BC}^2;$$

et comme
$$BC = AB \sin x = \frac{a}{2} \sin x ,$$

on a
$$\overline{SC}^2 = h^2 + \frac{a^2}{4} \sin^2 x = \frac{4h^2 + a^2 \sin^2 x}{4} .$$

D'autre part, pour calculer MN, nous abaissons OI perpendiculaire sur MN et nous tirons OM.

On a
$$OI = a \sin x ,$$

$$\overline{MN}^2 = 4\overline{MI}^2 = 4\left(\overline{OM}^2 - \overline{OI}^2\right) = 4(r^2 - a^2 \sin^2 x).$$

En remplaçant dans l'expression de V on a

$$V = \frac{\pi}{6}(4h^2 + a^2 \sin^2 x)\sqrt{r^2 - a^2 \sin^2 x} .$$

Si le point A est à l'intérieur du cercle, c'est-à-dire si $a < r$, il suffira de faire varier x de 0 à $\frac{\pi}{2}$, puisque la figure est symétrique par rapport au plan perpendiculaire au plan P et passant par la droite OA.

Si A est extérieur au cercle, c'est-à-dire si $a > r$, du point A on peut mener deux tangentes au cercle faisant avec OA un même angle θ tel que

$$\sin \theta = \frac{r}{a};$$

il suffira de faire varier x de 0 à θ.

Calculons la dérivée de la fonction V; on a

$$V' = \frac{\pi}{6}\left[2a^2 \sin x \cos x \sqrt{r^2 - a^2 \sin^2 x} - \frac{a^2 \sin x \cos x\,(4h^2 + a^2 \sin^2 x)}{\sqrt{r^2 - a^2 \sin^2 x}}\right]$$

ou
$$V' = \frac{\pi a^2 \sin x \cos x}{6\sqrt{r^2 - a^2 \sin^2 x}}(2r^2 - 4h^2 - 3a^2 \sin^2 x).$$

La dérivée change de signe quand x traverse une racine de l'équation

$$\sin^2 x = \frac{2r^2 - 4h^2}{3a^2} .$$

Cette équation admettra une racine à considérer si le second membre est positif, moindre que 1 si $a < r$, moindre que $\frac{r^2}{a^2}$ si $a > r$.

Nous sommes donc conduits à distinguer deux cas principaux.

Premier cas : $a \leqslant r$. x varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

1° $2r^2 - 4h^2 \leqslant 0$. V' est toujours négatif, V va sans cesse en diminuant.

2° $0 < 2r^2 - 4h^2 < 3a^2$. La dérivée admet une racine x' comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Quand

x varie de 0 à x', V va en croissant, passe par un maximum pour $x = x'$ et décroît quand x varie de x' à $\frac{\pi}{2}$.

3° $3a^2 \leqslant 2r^2 - 4h^2$. V′ est toujours positif, V va sans cesse en croissant.

Deuxième cas : $a > r$. x varie de 0 à θ, θ étant l'angle aigu défini par l'égalité

$$\sin \theta = \frac{r}{a}.$$

Dans le cas où $\frac{2r^2 - 4h^2}{3a^2}$ est positif, cette quantité est visiblement inférieure à $\frac{r^2}{a^2}$.

1° $2r^2 - 4h^2 \leqslant 0$. V′ est sans cesse négatif, V va toujours en diminuant.

2° $2r^2 - 4h^2 > 0$. Soit x' la racine de la dérivée qui est comprise entre 0 et θ.

Quand x varie de 0 à x', V croît, passe par un maximum pour $x = x'$, puis décroît quand x varie de x' à $\frac{\pi}{2}$.

On calculera aisément les valeurs limites de V pour les valeurs $0, x', \theta, \frac{\pi}{2}$ de la variable et le tableau récapitulatif sera aisé à établir.

A. Bailly, lycée de Dijon.

M. Villequey, maître répétiteur au collège de Semur, a résolu la même question.

---

246. — *Discuter les racines de l'équation*

$$x^6 - 3x^5 + mx^3 - 3x + 1 = 0,$$

dans laquelle m *est un paramètre qui peut varier de* $-\infty$ *à* $+\infty$.

(Certificat d'aptitude à l'enseignement spécial, 1892, 2e session.

L'équation proposée est réciproque; divisons le premier membre par x^3, on obtient

$$x^3 + \frac{1}{x^3} - 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + m = 0.$$

Posons $x + \frac{1}{x} = y$; on a

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2 \qquad \text{et} \qquad x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y,$$

et l'équation devient

$$f(y) = y^3 - 3y^2 - 3y + 6 + m = 0. \qquad (1)$$

A toute racine y' de cette équation correspondent deux racines de l'équation proposée définies par l'équation

$$x^2 - xy' + 1 = 0.$$

Ces deux racines ne seront réelles que si y' est réel et si de plus

$$y'^2 - 4 > 0,$$

ce qui exige que y' soit extérieur à l'intervalle $(-2, +2)$.

Nous allons séparer les racines de l'équation (1) à l'aide du théorème de Rolle, et nous comparerons ces racines à ± 2,

$$f'(y) = 3(y^2 - 2y - 1) = 0;$$

les racines de la dérivée sont $1 \pm \sqrt{2}$. Formons les résultats de substitution :

$$\begin{aligned}
&f(-\infty) && \text{a le signe } -\,;\\
&f(-2) && = m - 8;\\
&f(1-\sqrt{2}) && = m + 4\sqrt{2} + 1\,;\\
&f(2) && = m - 4;\\
&f(1+\sqrt{2}) && = m - 4\sqrt{2} + 1\,;\\
&f(+\infty) && \text{a le signe } +.
\end{aligned}$$

On en déduit le tableau suivant:

	$f(-\infty)$	$f(-2)$	$f(1-\sqrt{2})$	$f(2)$	$f(1+\sqrt{2})$	$f(+\infty)$
$m < -(4\sqrt{2}+1)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$m = -(4\sqrt{2}+1)$	$-$	$-$	0	$-$	$-$	$+$
$-(4\sqrt{2}+1) < m < 4$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$
$m = 4$	$-$	$-$	$+$	0	$-$	$+$
$4 < m < 4\sqrt{2}-1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$
$m = 4\sqrt{2}-1$	$-$	$-$	$+$	$+$	0	$+$
$4\sqrt{2}-1 < m < 8$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$m = 8$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$m > 8$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Dans les trois premiers cas, l'équation (1) admet une seule racine réelle extérieure à l'intervalle $(-2, +2)$; par suite, l'équation proposée admet deux racines réelles positives.

Dans le quatrième cas, l'équation (1) admet en outre la racine 2, à laquelle correspond pour l'équation proposée la racine double 1.

Dans le cinquième cas, l'équation (1) ayant deux racines réelles supérieures à 2, l'équation donnée a quatre racines réelles positives.

Dans le sixième cas, l'équation proposée a deux racines doubles positives.

Dans le septième, elle n'a aucune racine réelle.

Dans le huitième, elle admet la racine double -1.

Dans le neuvième, elle admet deux racines réelles négatives.

En résumé, on voit que

Si $m < 4$.	l'équation admet deux racines positives;	
$m = 4$,	» »	deux racines positives et la racine double 1 ;
$4 < m < 4\sqrt{2} - 1$,	» »	quatre racines positives;
$m = 4\sqrt{2} - 1$,	» »	deux racines doubles positives;

$4\sqrt{2} - 1 < m < 8$, l'équation n'a pas de racines réelles;
$m = 8$, » admet la racine double -1;
$m > 8$, » » deux racines négatives.

A. Audouin.

Solutions analogues par MM. Bailly, lycée de Dijon, et Morel, ingénieur au Creusot.

---

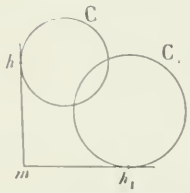
247. — *On donne une surface gauche de révolution* S, *une droite* Z *parallèle à l'axe de cette surface et une droite* D *choisie de telle sorte que la perpendiculaire commune aux deux droites* Z *et* D *soit dans le plan* P *du cercle de gorge de la surface* S.

Soit M *un point d'intersection de la surface* S *et de la droite* D. *Trouver le lieu géométrique décrit par la projection orthogonale du point* M *sur le plan* P *lorsque la droite* D *tourne autour de la droite* Z *supposée fixe.*

(Certificat d'aptitude à l'enseignement spécial, 1892, 2e session.)

La droite D tournant autour de Z engendre une seconde surface gauche de révolution S_1 dont le cercle de gorge est dans le plan P. Le point M décrit alors l'intersection des deux surfaces S et S_1 et tout revient à trouver la projection de cette intersection sur le plan P qui contient les deux cercles de gorge.

Soit m la projection sur le plan P d'un point M de l'intersection; menons les tangentes mh et mh_1 aux deux cercles de gorge, ce sont les projections des génératrices des deux surfaces passant au point M; désignons en outre par φ et φ_1 les angles que font les génératrices des deux surfaces avec leurs axes respectifs. Dans les triangles rectangles Mmh et Mmh_1, on a



$$mh = Mm \operatorname{tg} \varphi,$$
$$mh_1 = Mm \operatorname{tg} \varphi_1.$$

En divisant membre à membre, on a

$$\frac{mh}{mh_1} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_1}.$$

Le point m est donc tel que le rapport des longueurs de ses tangentes à deux cercles fixes est constant; le lieu du point m est un cercle passant par l'intersection de C et de C_1.

Remarque. — Ce résultat est une conséquence immédiate d'une propriété relative à deux quadriques qu'on peut énoncer de la manière suivante:

Si un point A *a même plan polaire par rapport à deux quadriques, le cône qui a pour sommet le point* A *et qui s'appuie sur l'intersection est du second ordre; par conséquent, la projection conique de l'intersection (le centre de projection étant le point* A*) sur un plan quelconque est une conique.*

De plus, si le plan sur lequel on projette coupe les deux quadriques suivant des coniques homothétiques, la projection de l'intersection sera homothétique de ces deux coniques.

Les deux surfaces gauches S et S_1 ont le plan P pour plan principal commun, il est le plan polaire d'un point à l'infini dans la direction perpendiculaire; donc la projection *orthogonale* de l'intersection des deux surfaces sur ce plan est une conique. De plus, cette conique est un cercle, puisque le plan P coupe les deux quadriques suivant des cercles.

E. Husson, soldat au 26e de ligne, à Nancy.

M. Edmond Rothé, lycée Henri-IV, a résolu la même question.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

234. — *Étant donne un quadrilatère* ABCM *dont trois sommets* A, B, C, *sont fixes, le quatrième parcourant une droite* Δ :

1° Trouver le lieu du milieu de la troisième diagonale UV *du quadrilatère complet;*

2° Étant donné un point P *du lieu, construire le quadrilatère correspondant.*

Nouvelle solution. — 1° Les points U, V se correspondent homographiquement sur les deux droites AB et AC, de sorte que l'enveloppe de UV est une conique tangente à AB et AC. En prenant ces droites pour axes, soit

$$2Buv + 2Du + 2Ev + F = 0,$$

l'équation tangentielle de cette conique, une tangente étant représentée par l'équation

$$ux + vy - 1 = 0.$$

Le point P correspondant à cette tangente a pour coordonnées

$$x = \frac{1}{2u}, \qquad y = \frac{1}{2v},$$

d'où

$$u = \frac{1}{2x}, \qquad v = \frac{1}{2y}.$$

Le lieu du point P a donc pour équation

$$2Fxy + 2Ex + 2Dy + B = 0.$$

Ce lieu est une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles à AB et AC; ces asymptotes sont les tangentes à la conique, enveloppe de UV, qui sont parallèles à AB et à AC.

2° Soit M le quatrième sommet du quadrilatère correspondant à P; le lieu du milieu a de AM est une droite δ parallèle à Δ. D'autre part, a est sur la droite joignant P au milieu b de BC; donc a est déterminé par l'intersection de δ avec Pb. Le point a étant obtenu, la droite Aa rencontre Δ au point cherché M.

Remarque. — En transformant homographiquement la première partie, on voit que si Δ' est une droite quelconque du plan, le lieu du conjugué harmonique du point de rencontre de UV avec Δ', par rapport à U et V, est une conique.

Dans ce cas, on peut encore résoudre facilement la seconde partie. Si ω est le point de rencontre de Δ et Δ', il suffit de construire la droite δ_1 conjuguée harmonique de Δ' par rapport à Δ et ωA, de joindre P au point b_1 conjugué harmonique par rapport à B et C du point de rencontre de BC avec Δ'; les droites δ_1 et Pb_1 se rencontrent en a_1 et Aa_1 rencontre Δ en M.

On peut encore ajouter que la question proposée revient à celle-ci :

Trouver le lieu du milieu du segment intercepté par deux tangentes fixes à une conique, sur une tangente variable; 2° étant donné un point du lieu, construire la tangente correspondante.

Ed. Hesson, soldat au 26e de ligne, à Nancy.

237. — *On donne une hyperbole équilatère* H. *Par son centre* O *on fait passer un cercle* C *de centre* ω *et l'on considère les deux paraboles* P, P′ *qui passent par l'intersection du cercle et de l'hyperbole; l'une de ces paraboles* P *est rencontrée par l'axe focal de l'hyperbole* H *en un seul point* A *à distance finie, et l'autre parabole* P′ *est rencontrée par l'autre axe en un seul point* B *à distance finie.*

1° Démontrer que les polaires Δ, Δ' *du point* O *par rapport aux paraboles* P, P′ *sont parallèles et à la même distance du point* O, *que la droite* AB *est à une distance moitié moindre du même point et que les axes des deux paraboles* P, P′ *passent par le point milieu du segment* Oω.

2° Le point ω *décrivant l'hyperbole* H, *trouver les lieux des points d'intersection des droites* Δ, Δ' *par la droite* AB, *l'enveloppe de la droite* AB *et les lieux des sommets des deux paraboles* P, P′.

L'équation de l'hyperbole H rapportée à ses axes de symétrie est

$$x^2 - y^2 - 2a^2 = 0. \qquad \text{(H)}$$

Soit

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0 \qquad \text{(C)}$$

l'équation du cercle de centre ω (α, β) et passant par l'origine.

L'équation générale des coniques passant par les points communs à (H) et à (C) est

$$\lambda(x^2 - y^2 - 2a^2) + x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0.$$

Cette équation représente une parabole si

$$(1 + \lambda)(1 - \lambda) = 0.$$

On obtient ainsi les équations de deux paraboles P, P′ en prenant successivement $\lambda = -1$ et $\lambda = +1$:

$$y^2 - \alpha x - \beta y + a^2 = 0, \qquad \text{(P)}$$

$$x^2 - \alpha x - \beta y - a^2 = 0. \qquad \text{(P')}$$

La parabole P coupe l'axe des x au point A dont l'abscisse $x = \frac{a^2}{\alpha}$; la parabole P′ coupe l'axe des y au point B ayant pour ordonnée $y = -\frac{a^2}{\beta}$.

Les polaires Δ, Δ' de l'origine par rapport à P et P′ sont les droites ayant pour équations

$$\alpha x + \beta y - 2a^2 = 0, \qquad (1) \quad (\Delta)$$

$$\alpha x + \beta y + 2a^2 = 0. \qquad (2) \quad (\Delta')$$

Ces droites sont symétriques par rapport à l'origine; leur distance à ce point est, en valeur absolue,

$$h = \frac{2a^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

La droite AB a pour équation $\alpha x - \beta y - a^2 = 0$; (3) (AB)
sa distance à l'origine est, en valeur absolue,

$$h' = \frac{a^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}};$$

donc

$$h = 2h'.$$

En posant

$$x - \frac{\alpha}{2} = X,$$

$$y - \frac{\beta}{2} = Y,$$

les équations des paraboles P, P′ deviennent

$$Y^2 - \alpha X + K = 0. \qquad \text{(P)}$$

$$X^2 - \beta Y + K' = 0, \qquad \text{(P')}$$

ce qui met en évidence les axes de ces paraboles; ce sont les droites ayant pour équations

$$y = \frac{\beta}{2} \quad \text{et} \quad x = \frac{\alpha}{2}$$

respectivement.

2° Le centre ω du cercle C décrivant l'hyperbole (H), on a

$$\alpha^2 - \beta^2 - 2a^2 = 0. \tag{4}$$

Les équations (1) et (3) donnent, par addition et soustraction,

$$\alpha = \frac{3a^2}{2x}, \qquad \beta = \frac{a^2}{2y}.$$

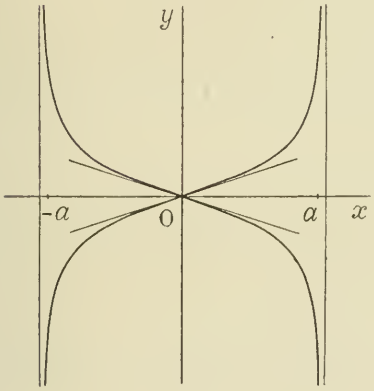


Fig. 1.

En portant ces valeurs dans l'équation (4), on obtient l'équation de l'un des lieux cherchés :

$$\frac{9a^4}{4x^2} - \frac{a^4}{4y^2} - 2a^2 = 0$$

ou

$$8x^2y^2 + a^2(x^2 - 9y^2) = 0.$$

Cette courbe a des asymptotes parallèles aux axes; les asymptotes parallèles à l'axe des y sont seules réelles; elles sont déterminées par l'équation

$$x^2 - \frac{9}{8}a^2 = 0.$$

Les tangentes à l'origine, qui est un point double, ont pour équations

$$x - 3y = 0, \qquad x + 3y = 0.$$

Les axes coordonnés sont des axes de symétrie; la courbe a la forme représentée sur la figure 1.

De même, les équations (2) et (3) donnent

$$\alpha = \frac{-a^2}{2x}, \qquad \beta = -\frac{3a^2}{2y};$$

le second lieu cherché a donc pour équation

$$8x^2y^2 + a^2(9x^2 - y^2) = 0.$$

Les asymptotes réelles sont données par l'équation

$$8x^2 - a^2 = 0;$$

les tangentes à l'origine, par

$$9x^2 - y^2 = 0.$$

La courbe est représentée sur la figure 2.

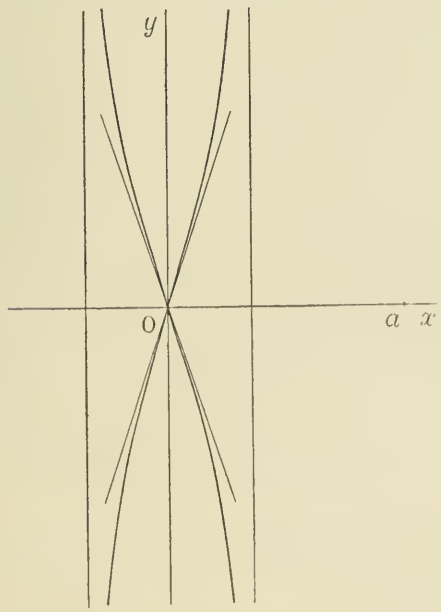


Fig. 2.

Enveloppe de AB. — On obtient l'enveloppe de AB en éliminant α et β entre les équations (3), (4) et l'équation

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta}. \tag{5}$$

En combinant ces équations, on obtient

$$\frac{x}{\alpha} \quad \frac{y}{\beta} = \frac{a^2}{2a^2},$$

d'où $\alpha = 2x$, $\beta = 2y$; et par suite l'équation de l'enveloppe est

$$x^2 - y^2 - \frac{a^2}{2} = 0.$$

On obtient ainsi une hyperbole équilatère ayant les mêmes asymptotes que l'hyperbole H.

Lieu du sommet de la parabole P. — L'axe de la parabole P a pour équation

$$y = \frac{\beta}{2}.$$

Remplaçant β par $2y$ dans l'équation de (P), on trouve $\alpha = \dfrac{a^2 - y^2}{x}$.

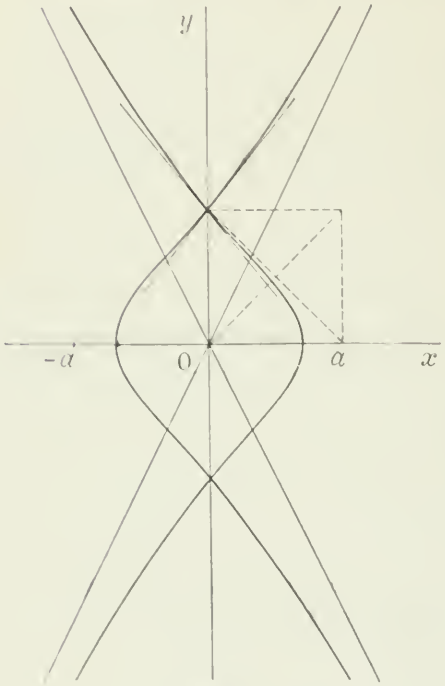


Fig. 3.

L'équation du lieu cherché est donc

$$(a^2 - y^2)^2 - 2(2y^2 + a^2)x^2 = 0$$

ou $$y^2(y^2 - 4x^2) - 2a^2(x^2 + y^2) + a^4 = 0.$$

Les asymptotes réelles sont données par l'équation $y^2 - 4x^2 = 0$; la courbe les coupe aux points ayant pour abscisses

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{10}}.$$

L'axe des x rencontre la courbe aux points

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

et l'axe des y la rencontre en deux points doubles définis par l'équation

$$(y^2 - a^2)^2 = 0.$$

Si nous posons $y = a + y'$, nous obtenons (en supprimant l'accent)

$$(y^2+2ay+a^2)(y^2+2ay+a^2-4x^2)-2a^2(x^2+y^2+2ay+a^2)+a^4=0$$

ou, en réduisant,

$$2a^2(2y^2 - 3x^2) - 8ax^2y + y^2(y^2 - 4x^2) = 0.$$

On voit ainsi que les tangentes au point ($x = 0$, $y = a$) ont pour coefficients angulaires $\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. La courbe a la forme représentée sur la figure 3.

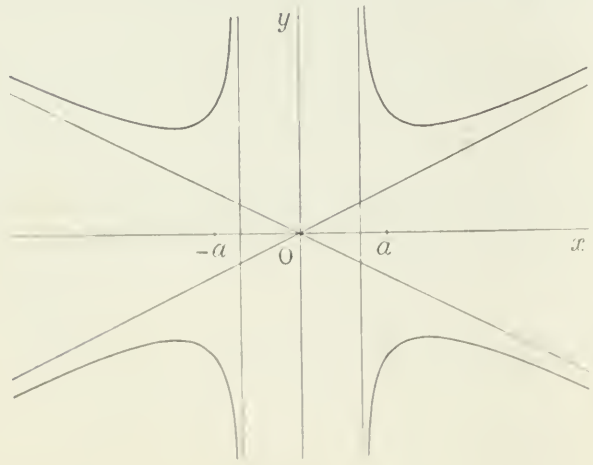


Fig. 4.

Cherchons enfin le lieu du sommet de la parabole P'. L'axe de cette parabole ayant pour équation $x = \dfrac{\alpha}{2}$, si nous remplaçons α par $2x$ dans l'équation de cette parabole, nous obtenons

$$\beta = -\frac{a^2 + x^2}{y},$$

et par conséquent le lieu cherché a pour équation

$$4x^2y^2 - (a^2 + x^2)^2 - 2a^2y^2 = 0.$$

ou $$x^2(x^2 - 4y^2) + 2a^2(x^2 + y^2) + a^4 = 0.$$

Les asymptotes sont définies par les équations

$$x^2 - 4y^2 = 0 \quad \text{et} \quad 2x^2 - a^2 = 0:$$

la forme de la courbe est représentée sur la figure 4.

Ont résolu la même question : MM. Audouin (Louis-le-Grand); Faily (Dijon); Feugman (Saint-Louis); Braillion (Amiens); Capdevielle; E. Faucillon; E. Gueden (Saint-Louis); L. Graux (Nantes); G. Tzitzeica (Bucarest); E. Lequintrec (Toulouse); Meynier (Nancy); Vasseur (Louis-le-Grand); Villequey (Semur).

238. — *Étant donnés un ellipsoïde et une droite* DD′ *perpendiculaire à l'un des plans principaux de cet ellipsoïde, on considère le triangle* $M_1M_2M_3$ *qui a pour sommets les points d'intersection du plan principal considéré avec les trois axes du cône des normales issues d'un point* P *de la droite* DD′.

Démontrer que, lorsque le point P *décrit la droite* DD′ :

1° Le point de concours des hauteurs du triangle $M_1M_2M_3$ *est fixe;*

2° Le triangle $M_1M_2M_3$ *est inscrit à une conique fixe et circonscrit à une deuxième conique fixe;*

3° Trouver le lieu géométrique des centres des cercles tangents aux trois côtés du triangle $M_1M_2M_3$.

1°. Le trièdre $PM_1M_2M_3$ étant trirectangle, le point P se projette sur le plan $M_1M_2M_3$ au point de concours des hauteurs du triangle $M_1M_2M_3$; ce point est donc fixe puisqu'il est à l'intersection du plan principal considéré et de la droite DD′.

2°. Soient
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$
l'équation de l'ellipsoïde et α, β, γ les coordonnées du point P. L'équation du cône des normales issues du point P est
$$\frac{\alpha(b^2 - c^2)}{x - \alpha} + \frac{\beta(c^2 - a^2)}{y - \beta} + \frac{\gamma(a^2 - b^2)}{z - \gamma} = 0.$$

Coupons ce cône par le plan des xy, en supposant que la droite DD′ soit perpendiculaire à ce plan; on obtient
$$\frac{\alpha(b^2 - c^2)}{x - \alpha} + \frac{\beta(c^2 - a^2)}{y - \beta} - (a^2 - b^2) = 0,$$
équation d'une hyperbole équilatère H qui est indépendante de la position du point P sur DD′, puisque l'équation ne renferme plus γ.

Le triangle $M_1M_2M_3$ est conjugué par rapport à cette conique et le point de concours de ses hauteurs est au pied D de la droite DD′ sur le plan principal.

Cela posé, M_1 étant le pôle de M_2M_3 par rapport à H, le diamètre conjugué de la direction M_2M_3 passe par M_1; on peut donc considérer ce point comme étant à l'intersection d'un diamètre quelconque de H et de la perpendiculaire menée par le point D à la direction conjuguée. Il en résulte que le point M_1 est situé sur l'hyperbole d'Apollonius H′ relative au point D et à la conique H. Le triangle $M_1M_2M_3$ est donc inscrit dans cette hyperbole.

Les côtés enveloppent la conique polaire réciproque de H′ par rapport à H; cette conique est une parabole P, puisque H′ passe par le centre de H. Le triangle $M_1M_2M_3$ est donc circonscrit à cette parabole; il en résulte que la directrice de cette parabole passe au point D.

3°. Soit S un cercle inscrit dans le triangle $M_1M_2M_3$; il existe un triangle circonscrit au cercle S et conjugué par rapport à l'hyperbole H; on sait alors qu'il existe un triangle conjugué par rapport au cercle S et inscrit dans l'hyperbole H; le point de concours des hauteurs de ce triangle coïncide avec le centre du cercle S et est situé sur l'hyperbole équilatère H; il en résulte que le lieu demandé est précisément cette hyperbole.

R. Gilbert, lycée Janson-de-Sailly.

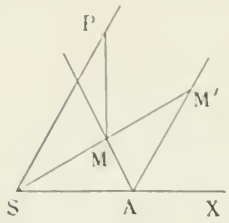
Ont résolu la même question : MM. Paul Begou, lycée de Marseille; Félix Dutech, lycée de Toulouse; Eugène Lequintrec, lycée de Toulouse; A. Marmion, lycée de Moulins; de Pange, à Paris.

---

239. — AM, AM′ *sont deux droites fixes,* S *un point fixe,* SMM′ *une transversale. Sur* SM *on décrit un triangle* SMP *directement semblable au triangle* SAM′. *Le lieu de* P *est une conique dont le point* S *est un foyer.*

Prenons $\overline{SA}$ pour axe polaire et soient a la longueur SA, θ l'angle MAX, θ_1 l'angle M′AX.

La droite SM est la bissectrice de $\widehat{PSX}$; si l'on désigne par ω l'angle PSX, en remarquant que



$\widehat{PMM'} = \theta_1$ et $\widehat{P} = \widehat{M'} = \theta_1 - \frac{\omega}{2}$, on a, dans le triangle SMP

$$\frac{\rho}{\sin\theta_1} = \frac{SM}{\sin\left(\theta_1 - \frac{\omega}{2}\right)}.$$

Or le triangle SAM donne

$$SM = a\,\frac{\sin\theta}{\sin\left(\theta - \frac{\omega}{2}\right)}.$$

L'équation du lieu est donc $$\rho = \frac{a\sin\theta\sin\theta_1}{\sin\left(\theta - \frac{\omega}{2}\right)\sin\left(\theta_1 - \frac{\omega}{2}\right)}$$

ou $$\rho = \frac{2a\sin\theta\sin\theta_1}{\cos(\theta - \theta_1) - \cos(\theta + \theta_1 - \omega)}.$$

Cette équation représente une hyperbole ayant pour foyer le point S et pour excentricité $\frac{1}{\cos(\theta - \theta_1)}$. Le point A est un point de l'hyperbole.

Ont résolu la question MM. Bailly, Dijon; Marmion, Moulins; Ed. Husson, Nancy.

M. Ed. Husson a montré que, réciproquement, étant donnés une hyperbole et un point A pris sur cette courbe, on peut déterminer deux droites AM, AM′ telles que l'hyperbole puisse être engendrée par le mode précédent.

---

240. — C *est le centre d'une hyperbole*, A *un sommet*, AT, AT′ *sont des parallèles aux asymptotes.* CTT′ *est une transversale qui rencontre l'hyperbole en* P. *Prouver que* $\overline{CP}^2 = CT.CT'$. (Genese.)

Soit A *un point quelconque* de l'hyperbole; désignons par P et P′ les extrémités d'un diamètre. Les cordes supplémentaires AP, AP′ ont des directions conjuguées par rapport à l'hyperbole, et par suite elles sont conjuguées harmoniques par rapport aux directions asymptotiques. Il en résulte que (P′, P, T, T′) est une division harmonique et par conséquent

$$\overline{CP}^2 = CT.CT'.$$

La proposition est donc démontrée pour un point quelconque de l'hyperbole.

H. Allard, lycée Condorcet.

La vérification par le calcul n'offre aucune difficulté.

Ont résolu la question : MM. Audibert, Marseille; Audouin, Louis-le-Grand; Bailly, Dijon; L. Bassal, Toulouse; Braillon, Amiens; Bergman, Saint-Louis; L. Espinat, instituteur à Espinchal; Faucillon, Chaptal; L. Graux, Nantes; J. Hais, Étampes; Ed. Husson, École normale; E. Lequintrec, Toulouse; J. Marchal, 89e de ligne, à Courbevoie; Meynier, Nancy; C. Pouilliart, Clermont-Ferrand; Rothé, Henri-IV; L. Vasseur, Louis-le-Grand; Tzitzéica, Bucarest; C. Wayrant, collège de Draguignan.

MÉCANIQUE

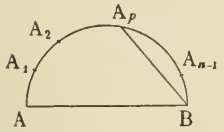
248. — *Une demi-circonférence de rayon* r, *limitée par le diamètre* AB, *est partagée en* n *parties égales aux points* $A_1, A_2, A_3, \ldots A_{n-1}$. *Chacun de ces points attire le point* B *proportionnellement à la distance qui le sépare de celui-ci, l'attraction à l'unité de distance étant représentée par* k.

1° *Déterminer la résultante* R *du système des forces ainsi appliquées au point* B.

2° *Vers quelle direction-limite tend cette résultante lorsque le nombre* n *augmente au delà de toute limite.*

(Certificat d'aptitude à l'enseignement spécial 1892, 2e session.)

1. Nous allons chercher les projections de la résultante sur la direction BA et sur une direction perpendiculaire située par rapport à AB du même côté que le demi-cercle.



Considérons la force attractive émanée de A_p. Son intensité est $k.BA_p$.

$$BA_p = 2r \cos ABA_p = 2r \cos \frac{p\pi}{2n}.$$

La force a donc pour intensité $2kr \cos \frac{p\pi}{2n}$, et par suite ses projections sur les deux directions indiquées sont

$$X_p = 2kr \cos^2 \frac{p\pi}{2n} = kr\left(1 - \cos \frac{p\pi}{n}\right),$$

$$Y_p = 2kr \cos \frac{p\pi}{2n} \sin \frac{p\pi}{2n} = kr \sin \frac{p\pi}{n}.$$

Les projections X et Y de la résultante seront alors

$$X = kr\left[n - 1 - \sum_1^{n-1} \cos \frac{p\pi}{n}\right],$$

$$Y = kr \sum_1^{n-1} \sin \frac{p\pi}{n}.$$

Or, en appliquant des formules connues, on trouve que

$$\sum_1^{n-1} \cos \frac{p\pi}{n} = 0, \qquad \sum_1^{n-1} \sin \frac{p\pi}{n} = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2n};$$

on aura donc

$$X = kr(n-1),$$

$$Y = kr \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2n}.$$

2. Quand n augmente indéfiniment, X et Y augmentent indéfiniment. La direction-limite de la résultante fera avec la direction BA un angle dont la tangente sera la limite de

$$\frac{Y}{X} = \frac{\operatorname{cotg} \frac{\pi}{2n}}{n-1} = \frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{(n-1) \sin \frac{\pi}{2n}}.$$

Le numérateur a pour limite 1, le dénominateur a même limite que $(n-1)\frac{\pi}{2n}$, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}$; par conséquent, la direction-limite de la résultante fera avec BA un angle dont la tangente est égale à $\frac{2}{\pi}$.

A. Bailly, lycée de Dijon.

Solutions analogues par MM. Audouin et de France, à Versailles.

CONCOURS DE 1893 *(suite)*.

ÉCOLE NORMALE *(suite)*.

286. — On donne un axe vertical o, $x = 0$, $y = 10^{cm}$ et une parabole dont la projection horizontale P a pour sommet $x = -5^{cm}$, $y = 12^{cm}$ et pour foyer $x = -4$, $y = 12$.

La projection verticale P′ de cette parabole est une droite passant par le point $x = -5$, $z = 0$ et par le point $x = 0$, $z = 5$.

1° Déterminer la méridienne principale de la surface de révolution engendrée par la parabole PP′, et tournant autour de la verticale o.

2° Construire la section de cette surface par le plan de front F, $y = 10 + 4\sqrt{2}$ centimètres.

3° Établir la ponctuation de la même surface, en ne conservant que la région derrière le plan de front F et au-dessous du plan horizontal $z = 10^{cm}$.

4° On établira en même temps la ponctuation de la parabole PP sur cette région de surface.

(24 juillet, 4 heures.)

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

Géométrie analytique.

287. — On donne dans le plan une conique C, et on considère trois points A, B et P pris sur cette conique.

A et B sont les extrémités d'un même diamètre.

1° Trouver l'équation du lieu L du point de rencontre des hauteurs du triangle ABP, lorsque A et B restant fixes, P se déplace sur la conique.

2° Discuter la nature et la forme du lieu L, suivant le genre de la conique C.

3° Trouver l'équation du lieu M du point de rencontre des hauteurs du triangle ABP, lorsque P restant fixe, le diamètre AB varie.

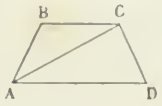
4° Construire le lieu M pour le cas où C est une hyperbole équilatère et où P est à l'une des extrémités de l'axe focal.

On devait se conformer rigoureusement à l'ordre adopté, et séparer en la numérotant comme ci-dessus, chaque partie de la composition.

(27 juillet, de 7 h. 1/2 à 11 h. 1/2.)

Calcul trigonométrique.

Du trapèze régulier ABCD, c'est-à-dire dont les angles adjacents à la base sont égaux, on connaît :



$$AB = 326^{m}726,$$
$$AC = 530^{m}930,$$
$$\widehat{BAC} = 27^{\circ}\ 47'\ 44'',77.$$

Calculer les angles et les côtés.

Les candidats avaient à reproduire tous leurs calculs sur la feuille de composition.

(27 juillet, de 3 h. à 4 h.)

Physique et chimie.

I. — **288.** On a établi pour l'alimentation d'une usine un réservoir d'eau cylindrique à 25^{m} de hauteur, et on se propose de transmettre à distance l'indication du volume d'eau contenu à chaque instant dans le réservoir.

On choisit pour cela la transmission par l'air comprimé, et on dispose sur le fond du réservoir une cloche pleine d'air, en communication d'une part avec l'eau du réservoir et d'autre part au moyen d'un tuyau de longueur convenable fixé sur son fond avec un manomètre placé au point choisi pour l'observer facilement.

Ce manomètre étant gradué de 25 en 25 grammes jusqu'à 1^{kg} par centimètre carré, on demande d'établir

une seconde graduation indiquant le volume d'eau contenu dans le réservoir, c'est-à-dire qu'on indiquera sur quels points de la première graduation s'arrêtera l'aiguille du manomètre quand le réservoir contiendra un, deux, trois mètres cubes d'eau.

Cette graduation ayant d'abord été établie en supposant constantes la pression et la température, on étudiera les modifications à lui faire subir : 1° quand la pression et la température varient ; 2° quand la masse d'air emprisonnée varie.

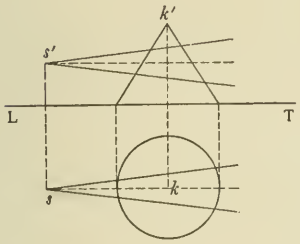
Application. Réservoir : $D = 7^m$ $H = 8^m$.
Cloche cylindrique : $d = 0{,}50$ $h = 0.50$.
Tube, section d'un centimètre carré, et longueur 50 mètres.

La graduation ayant été établie de 25 en 25 mètres cubes ($n = 25$) pour une pression atmosphérique représentée par une colonne de mercure de 710^{mm} et à la température de 15°, on supposera que la pression varie de 690 à 720 millimètres de mercure et la température de 0 à 30°, et on établira les changements à apporter à la graduation dans les cas extrêmes, la masse d'air emprisonnée restant constante.

II. — Exposer sommairement les principes sur lesquels reposent les notations chimiques, notamment la notation atomique.

(28 juillet, de 8 h. à 11 h. 1/2).

Géométrie descriptive.



Pénétration d'un cône de révolution dont l'axe est parallèle à LT, de sommet s, s', dans un cône de révolution dont l'axe est vertical, les axes des cônes se rencontrant.

Tangente à l'intersection.

Développement des surfaces.

Représenter les deux cônes par des génératrices équidistantes.

Dégager et figurer à part le solide commun.

Passer toute l'épure à l'encre de Chine.

(29 juillet, de 7 h. 1/2 à 11 h. 1/2.)

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Mathématiques spéciales.

289. — On considère un hyperboloïde à une nappe H et le cône S qui est l'enveloppe des plans normaux aux génératrices de cet hyperboloïde menés par un point donné M.

1° Déterminer les sommets du tétraèdre $MM_1M_2M_3$ conjugué par rapport à toutes les quadriques qui passent par l'intersection de l'hyperboloïde H et du cône S.

Trouver le lieu C des sommets M_1, M_2, M_3 de ce tétraèdre lorsque, le point M restant fixe, l'hyperboloïde H se modifie en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné.

2° Trouver la surface engendrée par la ligne C lorsque le point M décrit une droite donnée D, et déterminer les positions qu'il faut donner à cette droite D pour que cette surface soit de révolution.

3° Déterminer les coordonnées du centre ω de la sphère circonscrite au tétraèdre $MM_1M_2M_3$ en fonction des coordonnées du point M pour un hyperboloïde donné H.

Trouver le lieu de ce centre ω lorsque, le point M restant fixe, l'hyperboloïde H se modifie en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné.

4° Démontrer que la droite qui joint le centre ω de la sphère circonscrite au tétraèdre $MM_1M_2M_3$ au centre de gravité G de ce tétraèdre passe par un point fixe I lorsque, le point M restant fixe, l'hyperboloïde H se modifie en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné, et faire voir que le point G est le milieu de ωI.

Mathématiques élémentaires.

290. — Étant donnés deux cercles C et C_1 qui ont même centre A et un troisième cercle S dont le centre est O, on considère les cercles Σ orthogonaux à C et tels que l'axe radical de chacun d'eux et du cercle S touche le cercle C_1.

1° Démontrer que le lieu des centres des cercles Σ est un cercle S_1.

(*Pour abréger le langage, nous dirons que le cercle* S_1 *correspond au cercle* S.)

2° On suppose que les deux cercles C et C_1 sont confondus et l'on propose d'étudier, dans cette hypothèse, la position relative des cercles S et S_1 quand on fait varier le rayon du cercle S, le cercle C et le centre O du cercle S restant fixes.

3° Désignons par S_2 le cercle qui *correspond* à S_1, par S_3 celui qui *correspond* à S_2, et ainsi de suite.

En supposant encore les cercles C et C_1 *confondus*, on propose de chercher si le cercle S_n tend vers une position limite quand n augmente indéfiniment, mais seulement dans les trois hypothèses suivantes :

$$d < R, \qquad d = R, \qquad d = 3R,$$

d représentant la distance AO et R le rayon du cercle C.

Trouver, dans les hypothèses $d = R$ et $d = 3R$, l'expression du rayon du cercle S_n en fonction de R et de n.

Composition sur l'analyse et ses applications géométriques.

Soient $R(z)$ un polynome du huitième degré, $a_1, a_2, \ldots, a_8$ ses racines supposées toutes distinctes et différentes de 0.

Soient y une fonction de z définie par la relation

$$y^2 = R(z)$$

et $\pm y_0$ les valeurs de y pour $z = 0$.

On considère l'intégrale $\quad V = \int_0^x \frac{z^{p-1}dz}{y} \qquad (p = 1, 2, 3)$

obtenue en allant de l'origine au point (x) par un chemin *quelconque*, la valeur de y, pour $z = 0$, étant $+ y_0$.

On désigne par I la valeur de V qui correspond à un chemin *déterminé* OBx, et par A_j la valeur de V qui correspond à un chemin *déterminé* OCa_j allant de l'origine au point (a_j), $(j = 1, 2, \ldots, 8)$.

Cela posé, on propose de démontrer que *toutes* les valeurs que peut prendre V s'obtiennent en ajoutant aux quantités I et $2A_1 - I$ des multiples quelconques positifs ou négatifs de *six* constantes ω_j, définies par les relations

$$\omega_1 = 2(A_1 - A_2) \qquad \omega_2 = 2(A_2 - A_3)$$
$$\omega_3 = 2(A_1 - A_2 + A_3 - A_4) \qquad \omega_4 = 2(A_4 - A_5)$$
$$\omega_5 = 2(A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5 - A_6) \qquad \omega_6 = 2(A_6 - A_7).$$

Les constantes ω_j sont appelées les *périodes* de l'intégrale V, et l'on dit que ces périodes sont *distinctes* s'il n'existe entre elles aucune relation linéaire et homogène à coefficients entiers.

Application. — On suppose que la fonction $R(z)$ se réduise au trinome

$$z^8 + az^4 + 1,$$

et l'on considère les deux intégrales

$$\omega = \int_0^x \frac{dz}{y}, \qquad \upsilon = \int_0^x \frac{z^2 dz}{y}.$$

1° Démontrer que, pour chacune de ces intégrales, les six périodes se réduisent à *quatre* distinctes, qui peuvent être mises sous la forme

$$\Omega_1, \qquad \Omega_2, \qquad i\Omega_1, \qquad i\Omega_2$$

pour l'intégrale ω, et sous la forme

$$\Upsilon_1, \qquad \Upsilon_2, \qquad -i\Upsilon_1, \qquad -i\Upsilon_2$$

pour l'intégrale υ.

2° Entre les périodes Ω_i et Υ_i on a les relations

$$\Upsilon_1 = \Omega_1, \qquad \Upsilon_2 = i\Omega_2.$$

3° Montrer que l'on peut trouver pour les constantes A et B une infinité de valeurs telles que, pour l'intégrale $A\omega + B\upsilon$, le nombre des périodes se réduise à *deux* distinctes.

Mécanique rationnelle.

1° Une plaque pesante ABC dont le périmètre contient un segment rectiligne AB s'appuie par ce côté AB sur un plan fixe qui est horizontal et sur lequel AB glisse sans frottement.

Cette plaque, qui est immobile à l'origine du temps, est abandonnée à l'action de la pesanteur.

On demande la condition nécessaire et suffisante pour que, pendant le mouvement, le côté rectiligne AB se déplace parallèlement à sa position initiale.

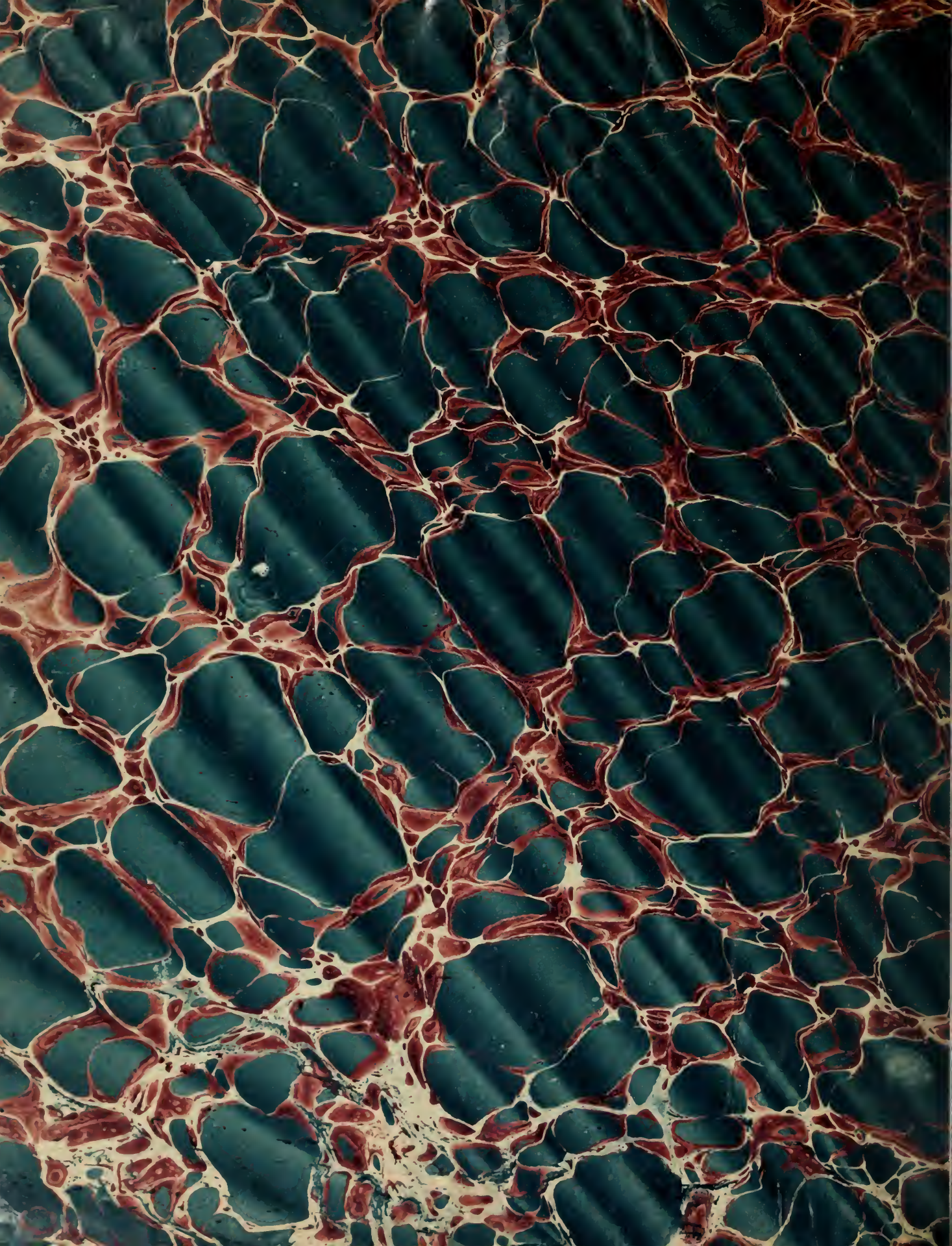
2° La condition demandée est, en particulier, satisfaite pour une plaque homogène dont le périmètre est une demi-circonférence de cercle.

On considère une plaque homogène, demi-circulaire, dont le rayon est égal à 1 mètre; on suppose, en outre, qu'à l'origine du temps la plaque est immobile et fait avec le plan horizontal un angle de 30 degrés.

On demande de trouver, dans ces hypothèses particulières, une limite supérieure et une limite inférieure du temps qui s'écoule depuis l'origine jusqu'à l'instant où la plaque semi-circulaire vient coïncider avec le plan horizontal.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX. — 19542-9-93



QA
1
R486
année 3

Revue de mathématiques
spéciales

Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY